J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 167-223

SUR LA STRUCTURE DES EQUATIONS DE LIE: III. LA COHOMOLOGIE DE SPENCER

HUBERT GOLDSCHMIDT

Les transformations infinitésimales d'un pseudogroupe de Lie transitif sur une variété X sont les solutions d'une équation différentielle linéaire R_k, qui est en fait une équation de Lie dans le fibré tangent T de X; l'espace des solutions formelles $R_{\infty,x}$ en un point $x \in X$ de cette équation est une algèbre de Lie topologique, et en fait une algèbre de Lie transitive au sens de Guillemin-Sternberg [7].

Nous nous proposons de poursuivre notre étude de la relation entre équations de Lie et algèbres de Lie transitives à partir des méthodes développées dans les parties précédentes de cet article (*Sur la structure des équations de Lie:* I. *Le troisième théorème fondamental*, J. Differential Geometry **6** (1972) 357–373; II. *Equations formellement transitives*, J. Differential Geometry **7** (1972) 67–85) et dans [20]. Certains résultats de cet article ont été annoncés dans [19].

Notre but principal est de montrer dans quelle mesure certaines propriétés d'une équation de Lie analytique R_k formellement transitive et formellement intégrable ne dépendent que de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$ des solutions formelles de R_k en $x \in X$, et de voir dans quelle mesure les résultats classiques de la théorie des groupes et algèbres de Lie (de dimension finie) peuvent se généraliser aux équations de Lie et aux algèbres de Lie transitives. En particulier, nous essayons de voir comment les propriétés d'objets géométriques associés à R_k peuvent se traduire en termes algébriques, nous donnant ainsi des objets algébriques associés à $R_{\infty,x}$.

Nous étudions tout particulièrement la cohomologie de Spencer d'une équation de Lie. Nous montrons que l'algèbre de Lie graduée $H^*(R_k)_x = \bigoplus_{j\geq 0} H^j(R_k)_x$ de cohomologie de Spencer en x de l'équation de Lie analytique R_k ne dépend, à isomorphisme près, que de l'algèbre de Lie topologique $R_{\infty,x}$; en particulier l'algèbre de Lie $H^0(R_k)_x$ des germes de champs de vecteurs en x solutions de R_k ne dépend que de $R_{\infty,x}$. En identifiant deux algèbres de Lie graduées de cohomologie de Spencer isomorphes, nous associons à toute algèbre de Lie transitive L une algèbre de Lie graduée $H^*(L) = \bigoplus_{j\geq 0} H^j(L)$, dont $H^0(L)$ est l'algèbre de Lie des "solutions" de L, de telle manière que:

Communicated by D. C. Spencer, January 11, 1974, and, in revised form, March 20, 1975. This work was supported in part by National Science Foundation Grant MPS 72-04357.

(i) l'algèbre de Lie graduée $H^*(L)$ ne dépende que de la classe d'isomorphisme de L en tant qu'algèbre de Lie topologique ;

(ii) on puisse définir l'algèbre de Lie graduée $H^*(L, I) = \bigoplus_{j \geq 0} H^j(L, I)$ de cohomologie de Spencer d'un idéal fermé $I \subset L$ qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de (L, I) en tant que couple d'algèbres de Lie topologiques ;

(iii) à toute suite exacte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow L \xrightarrow{\phi} L'' \longrightarrow 0 ,$$

où I est un idéal fermé de L et $\phi: L \to L''$ est un homomorphisme continu d'algèbres de Lie transitives, il corresponde un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$H^*(\phi): H^*(L) \to H^*(L'')$$

et une suite exacte de groupes de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^j(L, I) \xrightarrow{\iota} H^j(L) \xrightarrow{H^j(\phi)} H^j(L'') \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(L, I) \longrightarrow \cdots .$$

Des propriétés fonctorielles supplémentaires de ces algèbres de cohomologie de Spencer sont données au § 13.

Nous commençons, au § 10, par étudier la relation entre l'ensemble des idéaux fermés de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$ des solutions formelles en $x \in X$ d'une équation de Lie R_k formellement transitive et formellement intégrable sur X et une classe $\mathscr{I}(R_k)$ d'équations de Lie formellement intégrables associées à R_k, qui correspondent aux sous-pseudogroupes de Lie normaux d'un pseudogroupe de Lie solution d'une forme finie de R_k. L'espace des solutions formelles en x d'une équation de Lie appartenant à $\mathscr{I}(R_k)$ est un idéal fermé de $R_{\infty,x}$; inversement, si X est simplement connexe, une variante (théorème 10.1 et corollaire 10.1) de la version relative du troisième théorème fondamental (corollaire 6.2) nous dit que tout idéal fermé I de $R_{\infty,x}$ est l'espace des solutions formelles en x d'une équation de Lie appartenant à $\mathscr{I}(R_k)$. Nous montrons (proposition 10.3) que tout sous-fibré intégrable V de T invariant par R_k nous donne une équation de Lie appartenant à $\mathscr{I}(R_k)$ dont l'idéal fermé de $R_{\infty,x}$ correspondant est $R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$. Nous caractérisons algébriquement la classe des idéaux fermés de $R_{\infty,x}$ qui s'obtiennent ainsi ; elle ne dépend que de la sous-algèbre $R^0_{\infty,x}$ de $R_{\infty,x}$ des solutions formelles de R_k qui s'annulent en x et est formée des idéaux définis par un feuilletage dans $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$.

Au § 11, nous introduisons la notion d'équation de Lie projetable selon [20] et montrons comment le théorème de Kuranishi-Rodrigues donne des exemples de ces équations (théorème 11.1). Si R_k est une équation de Lie formellement intégrable sur X qui laisse invariant une fibration $\rho: X \to Y$, nous donnons des conditions sous lesquelles elle détermine une équation de Lie R''_{k_1} formellement intégrable sur Y qui correspond au "pseudogroupe quotient" d'un pseudogroupe de Lie solution d'une forme finie de R_k par la fibration ρ; nous dirons alors que R_k est ρ-projetable. Les résultats de [20] s'appliquent alors et nous donnent une suite exacte de groupes de cohomologie de Spencer qui relie les groupes de cohomologie des équations de Lie R_k, R''_{k_1} et de l'équation de Lie R'_{k_0} appartenant à $\mathscr{I}(R_k)$ déterminée par le fibré V des vecteurs tangents aux fibres de ρ (théorème 11.2). En particulier, si le groupe de cohomologie de Spencer $H^1(R_k)_x$ en $x \in X$ de l'équation R_k est nul, tout germe de champ de vecteurs en $\rho(x)$ solution de R''_{k_1} est l'image par ρ d'un germe en x d'un champ de vecteurs ρ-projetable solution de R_k. Lorsque $R_\infty \cap J_\infty(V) = \{0\}$, alors $R_{\infty,x}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $R''_{\infty,\rho(x)}$ des solutions formelles de R''_{k_1} en $\rho(x)$, et nous dirons que R_k est un prolongement de R''_{k_1}; dans ce cas les algèbres de Lie graduées de cohomologie de Spencer $H^*(R_k)_x$ et $H^*(R''_{k_1})$ sont isomorphes.

Si R_k est une équation de Lie analytique formellement transitive et formellement intégrable, au § 12 nous considérons la relation entre les sous-algèbres ouvertes de $R^0_{\infty,x}$ et les prolongements de R_k (corollaire 12.1) et la description géométrique d'épimorphismes d'algèbres de Lie transitives à l'aide d'équations de Lie projetables (théorème 12.3 (i)). Nous disons, selon Cartan, que deux équations de Lie formellement intégrables (sur des variétés différentes) sont équivalentes ou isomorphes si elles ont un prolongement commun. Nous démontrons un résultat de Kuranishi [22] : la notion d'équivalence locale d'équations de Lie analytiques formellement transitives et formellement intégrables est une relation d'équivalence. En fait, deux telles équations sont localement isomorphes si et seulement si leurs algèbres de Lie transitives sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie topologiques (corollaire 12.2). Nos démonstrations reposent sur la version relative du troisième théorème fondamental (corollaire 6.2). Des résultats analogues sur la correspondance entre algèbres de Lie transitives et pseudogroupes infinitésimaux transitifs et analytiques ont été obtenus par Petitjean et Rodrigues [24]. Le théorème 12.3 nous donne les résultats sur la cohomologie de Spencer des équations de Lie dont on aura besoin au § 13 pour définir et étudier la cohomologie de Spencer des algèbres de Lie transitives.

Nous avertissons le lecteur que nous utilisons constamment les résultats et les méthodes des deux premières parties de cet article et de [20], et nous lui recommandons fortement de se rapporter à ces articles ainsi qu'à [19], qui peut être considéré comme une introduction au présent article.

Je tiens à remercier D. C. Spencer pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de la rédaction de cet article.

9. Préliminaires

Nous utilisons les notations et la terminologie des parties précédentes de cet article. Pour ce qui concerne les rappels nécessaires de la théorie formelle des équations différentielles linéaires et leur cohomologie de Spencer, nous renvoyons le lecteur au § 1 de [20]. Nous supposerons toujours que les fibres d'un fibré vectoriel sont de même dimension. Si $R_k \subset J_k(E)$ est une équation différentielle d'ordre k dans un fibré vectoriel E, nous noterons $(R_k)_{+l}$ (et parfois R_{k+l}) le l-ième prolongement de R_k. Si $(R_k)_{+l}$ est un fibré vectoriel et si $\pi_{k+l}\colon (R_k)_{+(l+1)} \to (R_k)_{+l}$ est de rang constant pour tout $l \geq 0$, alors nous noterons $H^j(R_k)$ le j-ième groupe de cohomologie de Spencer de R_k ; rappelons que $H^0(R_k)$ est le faisceau de germes de solutions de R_k. Nous identifierons deux groupes de cohomologie s'ils sont isomorphes.

Si T est le fibré tangent de X, nous avons les crochets

$$\tilde{J}_k(\mathscr{T}) \times_X \tilde{J}_k(\mathscr{T}) \to \tilde{J}_k(\mathscr{T}) , \qquad \check{J}_k(\mathscr{T}) \times_X \check{J}_k(\mathscr{T}) \to \check{J}_{k-1}(\mathscr{T}) ,$$
$$\tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T}) \times_X J_k(\mathscr{T}) \to J_k(\mathscr{T}) .$$

Si $\xi, \eta \in J_{k+1}(\mathscr{T})$ et $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$, $\tilde{\eta} = \nu^{-1}\eta$, alors

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})\pi_k\eta = [\xi, \eta] + \tilde{\xi} \barwedge D\eta , \tag{9.1}$$

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})\pi_k\eta = \nu[\pi_k\tilde{\xi}, \pi_k\tilde{\eta}] + \tilde{\eta} \barwedge D\xi . \tag{9.2}$$

Rappelons que nous avons les crochets

$$[\textstyle\bigwedge^p T^* \otimes J_k(T), \bigwedge^q T^* \otimes J_k(T)] \subset \bigwedge^{p+q} T^* \otimes J_{k-1}(T) , \tag{9.3}$$

$$[\textstyle\bigwedge^p \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}), \bigwedge^q \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})] \subset \bigwedge^{p+q} \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}) , \tag{9.4}$$

$$[\textstyle\bigwedge^p J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}), \bigwedge^q J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})] \subset \bigwedge^{p+q} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}) \tag{9.5}$$

donnés par les formules

$$[\alpha \otimes \xi, \beta \otimes \eta] = \alpha \wedge \beta \otimes [\xi, \eta] , \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned}[\alpha \otimes \tilde{\xi}, \beta \otimes \tilde{\eta}] = \alpha \wedge \beta \otimes [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] &+ \alpha \wedge \mathscr{L}(\tilde{\xi})\beta \otimes \tilde{\eta} \\ &+ (-1)^p d\alpha \wedge i(\tilde{\xi})\beta \otimes \tilde{\eta} - (-1)^{pq}\beta \wedge \mathscr{L}(\tilde{\eta})\alpha \otimes \tilde{\xi} \\ &- (-1)^{pq+q} d\beta \wedge \mathscr{L}(\tilde{\xi})\alpha \otimes \tilde{\eta} ,\end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}[\bar{\alpha} \otimes \tilde{\xi}, \bar{\beta} \otimes \tilde{\eta}] = \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta} \otimes [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] &+ \bar{\alpha} \wedge \mathscr{L}(\tilde{\xi})\bar{\beta} \otimes \tilde{\eta} \\ &- (-1)^{pq}\bar{\beta} \wedge \mathscr{L}(\tilde{\eta})\bar{\alpha} \otimes \tilde{\xi} ,\end{aligned} \tag{9.8}$$

si $\alpha \in \bigwedge^p \mathscr{T}^*$, $\beta \in \bigwedge^q \mathscr{T}^*$, $\xi \in J_k(\mathscr{T})$, $\eta \in J_k(\mathscr{T})$ et $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$, $\tilde{\eta} = \nu^{-1}\eta$ et $\bar{\alpha} = \nu^{*-1}\alpha$, $\bar{\beta} = \nu^{*-1}\beta$. Alors si $u \in \bigwedge^p \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T})$, $v \in \bigwedge^q \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T})$, on a

$$D[u, v] = [Du, \pi_{k-1}v] + (-1)^p[\pi_{k-1}u, Dv] . \tag{9.9}$$

D'après le corollaire 3.12 de [10], on a

$$\bar{D}[\bar{u}, \bar{v}] = [\bar{D}\bar{u}, \pi_{k-1}\bar{v}] + (-1)^p[\pi_{k-1}\bar{u}, \bar{D}\bar{v}] \tag{9.10}$$

pour tous $\bar{u} \in \bigwedge^p J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, $\bar{v} \in \bigwedge^q J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$. Si $\tilde{u} \in \bigwedge^p T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$, $\tilde{v} \in \bigwedge^q T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$, on définit $\tilde{u} \barwedge \tilde{v} \in \bigwedge^{p+q-1} T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ par

$$\tilde{u} \barwedge \tilde{v} = \alpha \wedge i(\tilde{\xi})\beta \otimes \tilde{\eta} ,$$

si $u = \alpha \otimes \tilde{\xi}$, $v = \beta \otimes \tilde{\eta}$. Posons $D' = (\mathrm{id} \otimes \nu^{-1})\cdot D \cdot (\mathrm{id} \otimes \nu)$. La relation entre les crochets (9.3), (9.4) et (9.5) est donnée par les formules

$$\begin{aligned} \pi_{k-1}[\tilde{u}, \tilde{v}] &= (\mathrm{id} \otimes \nu^{-1})[u, v] + \tilde{u} \barwedge D'\tilde{v} + (-1)^p D'(\tilde{u} \barwedge \tilde{v}) \\ &\quad - (-1)^{pq}\tilde{v} \barwedge D'\tilde{u} - (-1)^{pq+q}D'(\tilde{v} \barwedge \tilde{u}) , \end{aligned} \tag{9.11}$$

$$(\nu^* \otimes \mathrm{id})[\bar{u}, \bar{v}] = [\tilde{u}, \tilde{v}] - (-1)^p D'\tilde{u} \barwedge \tilde{v} + (-1)^{pq+q} D'\tilde{v} \barwedge \tilde{u} \tag{9.12}$$

pour tous $u \in \bigwedge^p \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T})$, $v \in \bigwedge^q \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T})$, où $\tilde{u} = (\mathrm{id} \otimes \nu^{-1})u$, $\tilde{v} = (\mathrm{id} \otimes \nu^{-1})v$ et $\bar{u} = (\nu^{*-1} \otimes \mathrm{id})\,\tilde{u}$, $\bar{v} = (\nu^{*-1} \otimes \mathrm{id})\,\tilde{v}$. En écrivant

$$[\bar{u}, \bar{v}] = (\nu^* \otimes \mathrm{id})\,[\tilde{u}, \tilde{v}] ,$$

on obtient ainsi le crochet sur $\bigwedge \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$ introduit dans [10], [15] et [18] par "transport" à partir du crochet (9.5). Ce nouveau crochet ne coincide pas avec le crochet (9.4) et la formule (9.12) montre précisément comment il en diffère.

Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie. Si $R_{k+l} = (R_k)_{+l}$ est un fibré vectoriel et $\pi_{k+l}: R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est de rang constant pour tout $l \geq 0$, alors il existe un entier $m_0 \geq k$ tel que la cohomologie $H^j(R_k)_m$ de l'un des complexes

$$\bigwedge^{j-1} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m+1} \xrightarrow{D} \bigwedge^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_m \xrightarrow{D} \bigwedge^{j+1} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_{m-1} ,$$

$$\bigwedge^{j-1} \mathscr{T}^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_{m+1} \xrightarrow{D'} \bigwedge^j \mathscr{T}^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m \xrightarrow{D'} \bigwedge^{j+1} \mathscr{T}^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_{m-1} ,$$

$$\bigwedge^{j-1} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_{m+1} \xrightarrow{\bar{D}} \bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m \xrightarrow{\bar{D}} \bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_{m-1}$$

en $\bigwedge^j \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_m$, $\bigwedge^j \mathscr{T}^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m$ et $\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m$ respectivement s'identifie à $H^j(R_k)$ pour tout $m \geq m_0$. D'après (9.10), le crochet (9.5) détermine une structure d'algèbre de Lie graduée sur $H^*(R_k)_m = \bigoplus_{j \geq 0} H^j(R_k)_m$. Si $\bar{u} \in \bigwedge^p J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m$, $\bar{v} \in \bigwedge^q J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m$ vérifient $\bar{D}\bar{u} = 0$ et $\bar{D}\bar{v} = 0$, alors on a d'après (9.12)

$$[\tilde{u}, \tilde{v}] = (\nu^* \otimes \mathrm{id})\,[\bar{u}, \bar{v}] ,$$

où $\tilde{u} = (\nu^* \otimes \mathrm{id})\,\bar{u}$, $\tilde{v} = (\nu^* \otimes \mathrm{id})\,\bar{v}$, et $D'[\tilde{u}, \tilde{v}] = 0$ d'après (9.10). Le crochet (9.4) détermine donc la même structure d'algèbre de Lie graduée que le crochet

(9.5). D'autre part, d'après (9.9) si la classe de cohomologie de $[u, v]$ dans $H^{p+q}(R_k)_{m-1}$ est égale à celle de $\pi_{m-1}[\tilde{u}, \tilde{v}]$, d'après (9.11). Donc le crochet (9.3) détermine la même structure d'algèbre de Lie graduée sur $H^*(R_k) = \bigoplus_{j\geq 0} H^j(R_k)$. Dans la suite, nous nous servirons essentiellement que du crochet (9.5) ; on aurait pu aussi bien se servir du crochet (9.3) ou de (9.4).

10. Idéaux d'algèbres de Lie transitives et équations de Lie

Une algèbre de Lie transitive L est une algèbre de Lie topologique réelle dont l'espace vectoriel topologique sous-jacent est le dual topologique d'un espace vectoriel réel muni de la topologie discrète, et qui possède un voisinage de 0 qui ne contient aucun idéal autre que $\{0\}$.

Une telle algèbre de Lie L possède une sous-algèbre ouverte L^0 ne contenant aucun idéal de L autre que $\{0\}$, qu'on appellera fondamentale. Rappelons le résultat de Guillemin [21]: toute suite décroissante d'idéaux fermés d'une algèbre de Lie transitive est stationnaire. Rappelons aussi que $J_\infty(T)_x$, pour $x \in X$, est une algèbre de Lie transitive dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des noyaux $J^k_\infty(T)_x$ des projections $\pi_k : J_\infty(T)_x \to J_k(T)_x$, qui sont des sous-algèbres fondamentales. Toute sous-algèbre fermée L de $J_\infty(T)_x$ telle que $\pi_0(L) = J_0(T)_x$ est dite transitive, et munie de la topologie induite par $J_\infty(T)_x$ est une algèbre de Lie transitive dont $L^k = L \cap J^k_\infty(T)_x$ est une sous-algèbre fondamentale. Nous dirons que deux sous-algèbres transitives L, L' de $J_\infty(T)_x$ sont isomorphes s'il existe $\phi \in Q_\infty(x, x)$ tel que $\phi(L) = L'$. D'après le théorème III de Guillemin-Sternberg [7], les isomorphismes $\psi : L \to L'$ d'algèbres de Lie tels que $\psi(L \cap J^0_\infty(T)_x) = L' \cap J^0_\infty(T)_x$ sont précisément ceux qui sont induits par des éléments de $Q_\infty(x, x)$.

Si L est une algèbre de Lie transitive et L^0 une sous-algèbre fondamentale, on définit des sous-algèbres $D^k_L L^0$ de L^0 par récurrence sur k par:

$$D^0_L L^0 = L^0 \,, \quad D^k_L L^0 = \{\xi \in D^{k-1}_L L^0 \,|\, [L, \xi] \subset D^{k-1}_L L^0\} \quad \text{pour } k > 1\,;$$

on obtient ainsi des sous-algèbres fondamentales de L telles que $\bigcap_{k=0}^{\infty} D^k_L L^0 = \{0\}$ (cf. Guillemin [21]). Posons $L^k = D^k_L L^0$, $L^{-1} = L$ et $\mathrm{gr}_k L = L^{k-1}/L^k$, pour $k \geq 0$, de sorte que $\{L^k\}_{k\geq -1}$ est une filtration de L telle que $[L^i, L^j] \subset L^{i+j}$, pour $i \geq 0$, $j \geq -1$ et

$$\mathrm{gr}\, L = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{gr}_k\, L$$

est une algèbre de Lie graduée. Soit I un idéal fermé de L ; posons $I^k = I \cap L^k$, pour $k \geq -1$, de sorte que $\mathrm{gr}_k I = I^{k-1}/I^k$ s'identifie à un sous-espace de $\mathrm{gr}_k L$ et

$$\operatorname{gr} I = \bigoplus_{k \geq 0} \operatorname{gr}_k I$$

à un idéal de gr L. L'inclusion $[\operatorname{gr}_{-1} L, \operatorname{gr}_{k+1} I] \subset \operatorname{gr}_k I$ nous donne une inclusion

$$\delta: \operatorname{gr}_{k+1} I \to W^* \otimes \operatorname{gr}_k I ,$$

où l'on écrit $W = \operatorname{gr}_{-1} L$, d'où une application

$$\delta: \bigwedge^j W^* \otimes \operatorname{gr}_{k+1} I \to \bigwedge^{j+1} W^* \otimes \operatorname{gr}_k I$$

en posant

$$\delta(\omega \otimes u) = (-1)^j \omega \wedge \delta u$$

pour tous $\omega \in \bigwedge^j W$, $u \in \operatorname{gr}_{k+1} I$. Si SW est l'algèbre symétrique de W et $(\operatorname{gr} I)^* = \bigoplus_{k \geq 0} (\operatorname{gr}_k I)^*$, d'après Guillemin [21, § 3]

$$\delta^*: W \otimes (\operatorname{gr} I)^* \to (\operatorname{gr} I)^*$$

induit sur $(\operatorname{gr} I)^*$ la structure d'un SW-module gradué; d'après la proposition 3.2 de [21], $(\operatorname{gr} L)^*$ est un SW-module de type fini et, comme le SW-module gradué $(\operatorname{gr} I)^*$ est un quotient de $(\operatorname{gr} L)^*$, il est aussi de type fini. D'après le lemme 1 de [6, I], on obtient un complexe

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{gr}_k I \xrightarrow{\delta} W^* \otimes \operatorname{gr}_{k-1} I \xrightarrow{\delta} \bigwedge^2 W^* \otimes \operatorname{gr}_{k-2} I \xrightarrow{\delta} \cdots \\ \longrightarrow \bigwedge^n W^* \otimes \operatorname{gr}_{k-n} I \longrightarrow 0 , \end{aligned}$$

où n est la dimension de W et $\operatorname{gr}_m I = 0$ pour $m < 0$; de plus le groupe de cohomologie $H^{k-j,j}(\operatorname{gr} I)$ de ce complexe en $\bigwedge^j W^* \otimes \operatorname{gr}_{k-j} I$ est le dual de la composante de degré $k - j$ du SW-module gradué $\operatorname{Tor}_j^{SW}((\operatorname{gr} I)^*, \boldsymbol{R})$, qui est en fait un espace vectoriel de dimension finie, puisque $(\operatorname{gr} I)^*$ est un SW-module de type fini. On a donc:

Lemme 10.1. *Si I est un idéal fermé d'une algèbre de Lie transitive L et L^0 est une sous-algèbre fondamentale de L, alors il existe un entier k_0 tel que $H^{k,j}(\operatorname{gr} I) = 0$, pour tous $k \geq k_0$, $j \geq 0$.*

Si L est une sous-algèbre transitive de $J_\infty(T)_x$ et $L^0 = L \cap J_\infty^0(T)_x$, alors $D_L^k L^0 = L \cap J_\infty^k(T)_x$ et $\operatorname{gr}_k I$ s'identifie à un sous-espace de $(S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T))_x$ et W à $J_0(T)_x$. De plus, $(\operatorname{gr}_k I)_{+l} = \operatorname{gr}_{k+l} I$ pour tout $l \geq 0$ si et seulement si $H^{k+l,1}(\operatorname{gr} I) = 0$ pour tout $l \geq 0$.

Soient L une algèbre de Lie transitive et L^0 une sous-algèbre fondamentale de L; on note $\pi_0: L \to L/L^0$ la projection canonique.

Définition. Un idéal fermé $I \subset L$ est défini par un feuilletage dans (L, L^0) si le seul idéal I' de L vérifiant $I \subset I' \subset I + L^0$ est I lui-même. On dira alors que I est l'idéal défini par le feuilletage $\pi_0(I)$ dans (L, L^0).

Si $I, I^{\#}$ sont des idéaux fermés de L définis par des feuilletages dans (L, L^0) tels que $\pi_0(I) = \pi_0(I^{\#})$, alors $I = I^{\#}$, de sorte qu'un idéal fermé de L défini par un feuilletage dans (L, L^0) est déterminé par son image dans L/L^0. En effet, on a alors

$$I^{\#} \subset I + L^0 , \qquad I \subset I + I^{\#} \subset I + L^0 ;$$

puisque I est défini par un feuilletage, on obtient

$$I = I + I^{\#} \quad \text{et} \quad I^{\#} \subset I .$$

De même $I \subset I^{\#}$ et on a donc l'égalité $I = I^{\#}$.

Lemme 10.2. *Soit I un idéal fermé de L défini par un feuilletage dans (L, L^0). Si ϕ est un automorphisme de L tel que $\phi(I) \subset I + L^0$, alors $\phi(I) \subset I$.*

Démonstration. Si $\phi(I) \subset I + L^0$, alors $I' = I + \phi(I)$ est un idéal de L tel que $I \subset I' \subset I + L^0$, de sorte que $I' = I$ et $\phi(I) \subset I$.

Si L'^0 est une sous-algèbre ouverte de L contenue dans L^0, alors si I est défini par un feuilletage dans (L, L^0), il l'est aussi dans (L, L'^0).

Posons $L^k = D_L^k L^0$.

Proposition 10.1. *Soit $I \subset L$ un idéal fermé. Il existe un entier $m \geq 0$ tel que I soit défini par un feuilletage dans (L, L^m). Si $H^{k_0+l,1}(\mathrm{gr}\, I) = 0$ pour tout $l \geq 0$, alors I est défini par un feuilletage dans (L, L^{k_0}).*

Démonstration. Pour $k \geq 0$, soit I'_k la réunion de tous les idéaux de L contenus dans $I + L^k$. Il est clair que I'_k est un idéal fermé contenant I et défini par un feuilletage dans (L, L^k). D'autre part, la suite décroissante d'idéaux fermés

$$I'_0 \supset I'_1 \supset I'_2 \supset \cdots \supset I'_k \supset I'_{k+1} \supset \cdots$$

est stationnaire; il existe donc un entier $m \geq 0$ tel que $I'_m = I'_{m+l}$ pour $l \geq 0$. Puisque I et I'_m sont fermés

$$I = \bigcap_{k \geq 0} (I + L^k) = \bigcap_{k \geq 0} (I'_k + L^k) = \bigcap_{k \geq 0} (I'_m + L^k) = I'_m .$$

Donc I est défini par un feuilletage dans (L, L^m). Si I' est un idéal de L vérifiant

$$I \subset I' \subset I + L^{k_0} ,$$

alors $I' \subset I + I'^{k_0}$. Donc I/I^{k_0} est isomorphe à I'/I'^{k_0} et $\mathrm{gr}_{k_0} I = \mathrm{gr}_{k_0} I'$. On peut supposer sans perte de généralité que L est une sous-algèbre de Lie transitive de $J_\infty(T)_x$ telle que $L^0 = L \cap J^0_\infty(T)_x$, de sorte que $\mathrm{gr}_{k_0+l} I$ et $\mathrm{gr}_{k_0+l} I'$ s'identifient à des sous-espaces de $(S^{k_0+l} J_0(T)^* \otimes J_0(T))_x$. On a

$$\mathrm{gr}_{k_0+l} I = (\mathrm{gr}_{k_0} I)_{+l}$$

d'après notre hypothèse, et

$$\mathrm{gr}_{k_0+l} I' \subset (\mathrm{gr}_{k_0} I')_{+l} ,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{gr}_{k_0+l} I \subset \mathrm{gr}_{k_0+l} I' \subset (\mathrm{gr}_{k_0} I')_{+l} = (\mathrm{gr}_{k_0} I)_{+l} ,$$

et par suite

$$\mathrm{gr}_{k_0+l} I = \mathrm{gr}_{k_0+l} I' .$$

On vérifie aisément, par récurrence sur $l \geq 0$ que I/I^{k_0+l} est isomorphe à I'/I'^{k_0+l} ou $I' \subset I + L^{k_0+l}$ pour tout $l \geq 0$. Puisque I est fermé, on a donc $I' \subset I$.

Il résulte du lemme 10.2 et de la proposition 10.1 que, si I est un idéal fermé d'une sous-algèbre transitive L de $J_\infty(T)_x$, il existe un entier k tel que, quelque soit $\phi \in Q_\infty(x, x)$ vérifiant $\phi(L) = L$ et $\pi_{k+1}\phi(\pi_k I) = \pi_k I$, l'on ait $\phi(I) = I$. En effet, il suffit de prendre un entier k tel que I soit défini par un feuilletage dans (L, L^k), où $L^k = L \cap J^k_\infty(T)_x$.

Soient I un idéal fermé de L et L^0 une sous-algèbre fondamentale de L. Notons $\phi\colon L \to L/I$ la projection naturelle. Soit L'^0 une sous-algèbre de L/I telle que $\phi(L^0) \subset L'^0$. Si L'^0 ne contient aucun idéal de L/I autre que $\{0\}$, alors I est défini par un feuilletage dans (L, L^0). En effet, si I' est un idéal vérifiant $I \subset I' \subset I + L^0$, alors l'idéal $\phi(I')$ de L/I est contenu dans L'^0. On en déduit que $\phi(I') = \{0\}$ et $I' = I$. Inversement, si de plus on a $L'^0 = \phi(L^0)$ et I'' est un idéal de L/I contenu dans L'^0, alors l'idéal $I' = \phi^{-1}(I'')$ de L vérifie $I \subset I' \subset I + L^0$. Donc I est défini par un feuilletage dans (L, L^0) si et seulement si $\phi(L^0)$ ne contient aucun idéal de L/I autre que $\{0\}$. D'autre part, d'après le corollaire 1 de [21], l'algèbre de Lie L/I munie de la topologie quotient est le dual topologique d'un espace vectoriel muni de la topologie discrète. Comme la proposition 10.1 nous donne l'existence d'une sous-algèbre fondamentale L^0 de L telle que I soit défini par un feuilletage dans (L, L^0), l'image de L^0 dans L/I est ouverte et ne contient aucun idéal autre que $\{0\}$. Nous avons donc démontré la

Proposition 10.2. *Si I est un idéal fermé d'une algèbre de Lie transitive L, alors l'algèbre de Lie L/I munie de la topologie quotient est transitive. Si L^0 est une sous-algèbre fondamentale de L, alors I est défini par un feuilletage dans (L, L^0) si et seulement si l'image de L^0 dans L/I est une sous-algèbre fondamentale de L/I.*

Dans la suite de ce paragraphe, on note R_{k+l} le l-ième prolongement de l'équation de Lie $R_k \subset J_k(T)$.

Lemme 10.3. *Supposons que X soit connexe. Soient R_{k+1} une équation de Lie formellement transitive dans $J_{k+1}(T)$ et R'_k une équation différentielle dans $J_k(T)$ telles que*

$$(10.1) \qquad [\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{R}'_k] \subset \mathscr{R}'_k .$$

(i) *Si* R''_k *est une autre équation différentielle dans* $J_k(T)$ *telle que* $[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{R}''_k] \subset \mathscr{R}''_k$, *et s'il existe* $x \in X$ *telle que* $R'_{k,x} = R''_{k,x}$, *alors* $R'_k = R''_k$.

(ii) *L'image de* R'_k *dans* $J_l(T)$ *est un fibré vectoriel pour* $0 \leq l \leq k$. *Si* R'_{k+l} *est le l-ième prolongement de* R'_k, *le noyau* $g'_{k+l} = (g'_k)_{+l}$ *de* $\pi_{k+l-1}: R'_{k+l} \to J_{k+l-1}(T)$ *est un fibré vectoriel pour tout* $l \geq 0$. *Si* R'_{k+1} *est un fibré vectoriel, on a*

$$(10.2) \qquad [R_{k+1}, R'_{k+1}] \subset R'_k ;$$

si $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ *est surjectif, alors* (10.2) *est équivalent à* (10.1). *Si* $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ *est surjectif et* $R'_{k+1} \subset R_{k+1}$, *alors* R'_k *est une équation de Lie. Si* $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ *est surjectif et* V *désigne le sous-fibré de* T *image de* $\tilde{R}'_k$ *dans* T, *alors* $R'_k \subset J_k(V)$.

(iii) *Si* R_{k+1} *est formellement intégrable, alors* R'_{k+l} *est un fibré vectoriel, les applications* $\pi_{k+l}: R'_{k+l+m} \to R'_{k+l}$ *sont de rang constant et*

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1}, \mathscr{R}'_{k+l}] \subset \mathscr{R}'_{k+l} , \qquad [R_{k+l+1}, R'_{k+l+1}] \subset R'_{k+l} ,$$

pour tous $l, m \geq 0$. *Si de plus* $R'_{k+1} \subset R_{k+1}$, *alors* $R'_{k+l} \subset R_{k+l}$ *pour tout* $l \geq 1$ *et* $R'_{\infty,x} = \varprojlim R'_{k+l,x}$ *est un idéal fermé de l'algèbre de Lie transitive* $R_{\infty,x} = \varprojlim R_{k+l,x}$, *pour tout* $x \in X$.

Démonstration. (i) Les sous-fibrés R'_k, R''_k de $J_k(T)$ sont stables par la dérivée covariante induite par une R_{k+1}-connexion sans courbure dans $J_k(T)$. D'après la proposition 3.2, l'ensemble des points $a \in X$, tels que leurs fibres en a soient égales, est à la fois ouvert et fermé. Puisqu'il est non-vide par hypothèse et X est connexe, nous avons l'égalité $R'_k = R''_k$.

(ii) Comme $\pi_l : R'_k \to J_l(T)$, pour $0 \leq l \leq k$, est compatible aux dérivées covariantes induites par une R_{k+1}-connexion ω sans courbure dans R'_k et $J_l(T)$, d'après la proposition 3.2, g'_k et l'image R'_l de R'_k par π_l sont des fibrés vectoriels. Maintenant vérifions que $g'_{k+l} = (g'_k)_{+l}$ est un fibré vectoriel pour $l \geq 1$. L'application naturelle

$$\Delta_{l,k}: S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T) \to S^l J_0(T)^* \otimes S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$$

commute aux dérivées covariantes induites par ω dans les fibrés $S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ et $S^l J_0(T)^* \otimes S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$. Puisque $(g'_k)_{+l} = \Delta_{l,k}^{-1}(S^l J_0(T)^* \otimes g'_k)$ et g'_k est stable par la dérivée covariante induite par ω dans $S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$, d'après la proposition 3.2, $(g'_k)_{+l}$ est un fibré vectoriel (cf. proposition 5.3). Si $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ est surjectif, puisque le noyau de cette application est un fibré vectoriel, R'_{k+1} l'est aussi. Si $\xi \in \mathscr{R}_{k+1}$, $\eta \in \mathscr{R}'_{k+1}$ et $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$, l'identité (9.1) nous donne

$$[\xi, \eta] = \mathscr{L}(\tilde{\xi})\pi_k\eta - \tilde{\xi} \barwedge D\eta \in \mathscr{R}'_k$$

et (10.2) si R'_{k+1} est un fibré vectoriel, et, lorsque $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ est surjectif, l'équivalence de (10.1) et de (10.2). Si $R'_{k+1} \subset R_{k+1}$, d'après la proposition 4.4 de [10], la surjectivité de $\pi_k : R'_{k+1} \to R'_k$ implique que R'_k est une équation de Lie. De la surjectivité de $\pi_l : R'_{l+1} \to R'_l$, pour $0 \leq l \leq k$, on déduit que si $u \in \mathscr{R}'_{l+1}$, alors $Du \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}'_l$ et $R'_{l+1} \subset (R'_l)_{+1}$ pour $0 \leq l \leq k-1$. Comme $(R'_0)_{+l} = J_l(V)$, on a $R'_l \subset J_l(V)$.

(iii) Comme $J_l(J_k(T))$ est un fibré vectoriel associé à $\tilde{J}_{k+l+1}(T)$ à l'aide du crochet

$$[\tilde{J}_{(l,k+1)}(\mathscr{T}),\ J_l(J_k(\mathscr{T}))] \subset J_l(J_k(\mathscr{T}))$$

et de l'injection $\tilde{\lambda}_l : \tilde{J}_{k+l+1}(T) \to \tilde{J}_{(l,k+1)}(T)$ (cf. § 8), une R_{k+l+1}-connexion sans courbure induit une dérivée covariante dans $J_l(J_k(T))$; les sous-fibrés $J_{k+l}(T)$ et $J_l(R'_k)$ de $J_l(J_k(T))$ sont stables par cette dérivée covariante, puisque

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1}, J_l(\mathscr{R}'_k)] \subset [\tilde{J}_l(\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}), J_l(\mathscr{R}'_k)] \subset J_l(\mathscr{R}'_k) ,$$

où $\tilde{J}_l(\tilde{R}_{k+1})$ est le sous-fibré $\nu^{-1}J_l(R_{k+1})$ de $\tilde{J}_{(l,k+1)}(T)$ (cf. § 8). De la proposition 3.2, il résulte que $R'_{k+l} = J_l(R'_k) \cap J_{k+l}(T)$ est un fibré vectoriel, et de cette dernière inclusion que

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1}, \mathscr{R}'_{k+l}] \subset \mathscr{R}'_{k+l} .$$

D'après (ii), les applications $\pi_{k+l} : R'_{k+l+m} \to R'_{k+l}$ sont de rang constant pour tous $l, m \geq 0$, et on a l'inclusion

$$[R_{k+l+1}, R'_{k+l+1}] \subset R'_{k+l}$$

pour tout $l \geq 0$. Si $R'_{k+1} \subset R_{k+1}$, cette dernière inclusion implique que $R'_{\infty,x}$ est un idéal fermé de $R_{\infty,x}$ pour tout $x \in X$.

Lemme 10.4. *Soient R_{k+1} une équation de Lie formellement transitive dans $J_{k+1}(T)$ et E un sous-espace de $J_k(T)_x$, où $x \in X$, tels que $[R^0_{k+1,x}, E] \subset E$; alors il existe une équation différentielle $R'_k \subset J_k(T)$ sur un voisinage U de x telle que $R'_{k,x} = E$ et $[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{R}'_k] \subset \mathscr{R}'_k$.*

Démonstration. Soit ω une R_{k+1}-connexion sans courbure sur un voisinage simplement connexe U de x. Soit R'_k le sous-fibré de $J_k(T)_{|U}$ stable par la dérivée covariante dans $J_k(T)_{|U}$ induite par ω dont la fibre en x est égale à E. Montrons que sur U l'on a

$$(10.3) \qquad [R^0_{k+1}, R'_k] \subset R'_k .$$

Si $\xi \in \Gamma(U, R^0_{k+1})$ et $\eta \in \Gamma(U, R'_k)$ sont des sections horizontales par rapport aux dérivées covariantes induites par ω dans R^0_{k+1} et R'_k, on a

$$[\bar{\omega}(\zeta), [\xi, \eta]] = [[\bar{\omega}(\zeta), \xi], \eta] + [\xi, [\bar{\omega}(\zeta), \eta]] = 0$$

pour tout $\zeta \in J_0(\mathscr{T})_{|U}$; donc $[\tilde{\xi}, \eta]$ est une section horizontale de $J_k(T)$. D'autre part, par hypothèse

$$[\tilde{\xi}, \eta](x) = [\tilde{\xi}(x), \eta(x)] \in R'_{k,x} .$$

L'inclusion (10.3) découle maintenant du fait que $J_k(T)$ soit associé à $\tilde{J}_{k+1}(T)$, notamment de la relation (iv) de la définition donnée au § 3. De (10.3) et de la construction de R'_k, il résulte que l'on a (10.1).

Lemme 10.5. *Soient V un sous-fibré vectoriel de T et R_k une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$. Si $R_1 = \pi_1 R_k$, supposons que $[\tilde{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{V})] \subset J_0(\mathscr{V})$. On a*

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1}, J_{k+l}(\mathscr{V})] \subset J_{k+l}(\mathscr{V}) \tag{10.4}$$

et

$$[R_{k+l+1}, J_{k+l+1}(V)] \subset J_{k+l}(V) , \tag{10.5}$$

ce qui implique $R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x = \varprojlim R_{k+l,x} \cap J_{k+l}(V)_x$ est un idéal fermé de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. En considérant le crochet

$$[\tilde{J}_{(m,1)}(\mathscr{T}), J_m(\mathscr{T})] \subset J_m(\mathscr{T}) ,$$

on voit que

$$[\tilde{J}_m(\tilde{\mathscr{R}}_1), J_m(\mathscr{V})] \subset J_m(\mathscr{V})$$

puisque c'est vrai pour $m = 0$. Comme $\tilde{R}_{k+l+1} \subset \tilde{J}_{k+l}(\tilde{R}_1)$, on obtient (10.4). La formule (9.1) nous permet d'en déduire (10.5) : si $\xi \in \mathscr{R}_{k+l+1}$, $\eta \in J_{k+l+1}(\mathscr{V})$ et $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$, alors

$$[\xi, \eta] = \mathscr{L}(\tilde{\xi})\pi_k\eta - \tilde{\xi} \barwedge D\eta \in J_{k+l}(\mathscr{V}) .$$

Théorème 10.1. *Supposons X simplement connexe. Soit R_k une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$. Soient $x \in X$ et I un idéal fermé de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$.*

(i) *Il existe une équation de Lie $R'_k \subset R_k$ et une seule telle que*

$$R'_{k,x} = \pi_k I ,$$

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{R}'_k] \subset \mathscr{R}'_k . \tag{10.6}$$

(ii) *Si $R'_{k+l} \subset R_{k+l}$ est l'équation de Lie dans $J_{k+l}(T)$ qui correspond à $\pi_{k+l}I$ d'après* (i), *on a pour $l \geq 1$*

$$[R_{k+l}, R'_{k+l}] \subset R'_{k+l-1} . \tag{10.7}$$

(iii) *Il existe un entier* $k_0 \geq k$ *tel que* $H^{m,1}(\mathrm{gr}\, I) = 0$ *pour tout* $m \geq k_0$. *Si* k_0 *est un entier ayant cette propriété, alors* R'_{k_0} *est formellement intégrable et* R'_{k_0+l} *est le l-ième prolongement de* R'_{k_0}. *De plus,* $\pi_m(R'_{k_0}) = R'_m$, *pour* $k \leq m \leq k_0$, *et*

$$R'_{\infty,x} = \varprojlim R'_{k+l,x} = I \ .$$

(iv) *L'image de* $\tilde{R}'_k$ *dans* T *est un sous-fibré vectoriel* V *intégrable de* T *tel que* $\pi_0(I) = J_0(V)_x$, $[\bar{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{V})] \subset J_0(\mathscr{V})$ *et* $R'_{k+l} \subset J_{k+l}(V)$, *pour* $l \geq 0$. *De plus,* $R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$ *est un idéal fermé de* $R_{\infty,x}$ *et l'idéal* I *de* $R_{\infty,x}$ *est défini par un feuilletage dans* $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$ *si et seulement si*

$$R'_{\infty,x} = R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x \ .$$

Démonstration. Comme I est un idéal de $R_{\infty,x}$, on a

$$[R^0_{k+1,x}, \pi_k I] \subset \pi_k I \ .$$

Donc d'après le lemme 10.4, il existe une équation différentielle $R'_k \subset R_k$ sur un voisinage U de x telle que $R'_{k,x} = \pi_k I$ et telle que l'on ait (10.6) sur U. Puisque X est simplement connexe et possède un recouvrement par des ouverts sur lesquels il existe des R_{k+1}-connexions sans courbure, l'ouvert connexe maximal contenant U et sur lequel l'on ait une équation ayant ces propriétés est égal à X tout entier, en vertu du lemme 10.3 (i) et du lemme 10.4. Vérifions que R'_k est une équation de Lie. On définit $R'_{k+1} \subset R_{k+1}$ de la même manière que R'_k à partir de $\pi_{k+1} I$ et R_{k+1}. Montrons que

$$\pi_k R'_{k+1} = R'_k \ , \tag{10.8}$$

$$R'_{k+1} \subset (R'_k)_{+1} \ , \tag{10.9}$$

et que (10.7) est vrai pour $l = 1$. Ces trois assertions ensemble entraînent, d'après le lemme 10.3 (ii), que R'_k est une équation de Lie. D'après le lemme 10.3 (ii), l'image de R'_{k+1} dans $J_k(T)$ est un fibré vectoriel $\pi_k R'_k$ tel que $[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, \pi_k \mathscr{R}'_k] \subset \pi_k \mathscr{R}'_k$. Comme $\pi_k(R'_{k+1,x}) = R'_{k,x}$, d'après le lemme 10.3 (i) et (10.6), on a l'égalité (10.8). L'ensemble A des points $a \in X$ tels que $[R_{k+1,a}, R'_{k+1,a}] \subset R'_{k,a}$ contient x, puisque I est un idéal de $R_{\infty,x}$. Soient ω une R_{k+2}-connexion sans courbure sur un voisinage simplement connexe B d'un point $a \in A$ et $\omega' = \pi_{k+1}\omega$. Si ξ, η sont des sections horizontales de R_{k+1} et de R'_{k+1} respectivement par rapport à la dérivée covariante induite par ω dans $J_{k+1}(T)$, alors

$$[\bar{\omega}'(\zeta), [\xi, \eta]] = [[\bar{\omega}(\zeta), \xi], \eta] + [\xi, [\bar{\omega}(\zeta), \eta]] = 0$$

pour tout $\zeta \in J_0(\mathscr{T})_{|B}$, et $[\xi, \eta](a) \in R'_{k,a}$. Donc d'après (10.6), $[\xi, \eta]$ est une section horizontale de R'_k sur B par rapport à la dérivée covariante induite par ω' dans $J_k(T)$. On a donc (10.7) pour $l = 1$ sur B, ce qui montre que A est à la fois ouvert et fermé. Puisque X est connexe, on a $A = X$ et (10.7) pour $l = 1$. Si $\xi \in \mathscr{R}_{k+1}$, $\eta \in \mathscr{R}'_{k+1}$, on écrit $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$ et l'identité (9.1) nous donne

$$\tilde{\xi} \barwedge D\eta = [\tilde{\xi}, \pi_k\eta] - [\xi, \eta] \in \mathscr{R}'_k \tag{10.10}$$

d'après (10.6) et (10.7). Comme R_{k+1} est une équation formellement transitive, l'on déduit de (10.8) et de (10.10) l'inclusion (10.9). Nous avons donc démontré (i) et (ii). Le lemme 10.1 nous donne l'existence de l'entier k_0 de (iii). Si g'_{k+l} est le fibré vectoriel noyau de $\pi_{k+l}\colon R'_{k+l} \to J_{k+l-1}(T)$, alors $g'_{k+l,x} = \mathrm{gr}_{k+l}\, I$, en considérant I muni de la filtration induite par $R^0_{\infty,x}$, et par suite $g'_{k_0+l,x} = (g'_{k_0,x})_{+l}$ pour $l \geq 0$. D'après le lemme 10.3 (ii), $(g'_{k_0})_{+l}$ est un fibré vectoriel et, comme $R'_{k_0+l} \subset (R'_{k_0})_{+l}$ nous avons une inclusion de fibrés vectoriels $g'_{k_0+l} \subset (g'_{k_0})_{+l}$ pour $l \geq 0$. Puisque les fibres en x de ces deux fibrés sont identiques, ces fibrés sont égaux. Du diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g'_{k_0+l+1} \arrow[r] \arrow[d] & (g'_{k_0})_{+(l+1)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R'_{k_0+l+1} \arrow[r] \arrow[d] & (R'_{k_0})_{+(l+1)} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R'_{k_0+l} \arrow[r] \arrow[d] & (R'_{k_0})_{+l} & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

on déduit par récurrence que $R'_{k_0+l} = (R'_{k_0})_{+l}$ pour tout $l \geq 0$, d'où (iii). Le lemme 10.3 (ii) nous donne l'existence de V et les inclusions $R'_{k+l} \subset R_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$. Puisque $I \subset R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$, on a

$$J_0(V)_x = \pi_0(I) \subset \pi_0(R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x) \subset J_0(V)_x \,.$$

Comme $[\mathscr{\tilde{R}}_1, J_0(\mathscr{V})] \subset J_0(\mathscr{V})$, d'après le lemme 10.5, $R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$ est un idéal fermé de $R_{\infty,x}$ contenant I tel que

$$\pi_0(I) = \pi_0(R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x) \,.$$

Si I est défini par un feuilletage, on a donc l'égalité $I = R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$. Inversement, si $I^\#$ est un idéal fermé de $R_{\infty,x}$ tel que $\pi_0(I^\#) = J_0(V)_x$ et contenant

$R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$, alors l'image de l'équation de Lie $R_k'^{\sharp} \subset R_k$ qui correspond à $\pi_k I^\sharp$ et R_k d'après (i) est un sous-fibré W de T contenant V tel que $R_{k+l}'^{\sharp} \subset J_{k+l}(W)$ et $V_x = W_x$. Par conséquent, $W = V$ et $I^\sharp = R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$, ce qui implique que ce dernier est défini par un feuilletage dans $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$ et conclut la démonstration de (iv).

Corollaire 10.1 (*cf.* [19]). *Supposons X simplement connexe. Soit R_k une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$. Soient $x \in X$ et I un idéal fermé de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$. Il existe un entier $k_0 \geq k$ et une équation de Lie unique $R'_{k_0} \subset R_{k_0}$ dans $J_{k_0}(T)$ formellement intégrable telle que*

$$[R_{k_0+1}, (R'_{k_0})_{+1}] \subset R'_{k_0}\,, \qquad R'_{\infty,x} = I\,.$$

Proposition 10.3. *Supposons que X soit connexe. Soient R_{k+1} une équation de Lie formellement transitive dans $J_{k+1}(T)$ et N_k une équation différentielle dans $J_k(T)$ telles que $[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k$. Soit V un sous-fibré vectoriel de T tel que $[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, J_k(\mathscr{V})] \subset J_k(\mathscr{V})$.*

(i) *Alors $\bar{N}_k = N_k \cap J_k(V)$ est une équation différentielle dans $J_k(T)$ et*

$$[\tilde{\mathscr{R}}_{k+1}, \bar{\mathscr{N}}_k] \subset \bar{\mathscr{N}}_k\,.$$

Si V est intégrable et N_k est une équation de Lie, $\bar{N}_k$ est une équation de Lie.

(ii) *Si R_{k+1} est formellement intégrable, il existe une équation différentielle formellement intégrable N'_{k_0} dans $J_{k_0}(T)$ et un sous-fibré vectoriel W de V tels que*

$$\begin{aligned}
&\pi_0 \tilde{N}'_{k_0} = W\,,\\
&[\tilde{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{W})] \subset J_0(\mathscr{W})\,, \qquad \text{où } R_1 = \pi_1 R_k\,,\\
&[\tilde{\mathscr{R}}_{k_0+1}, \mathscr{N}'_{k_0}] \subset \mathscr{N}'_{k_0}\,,\\
&N'_{k_0+r} \subset N_{k_0+r} \cap J_{k_0+r}(W)\,, \qquad \text{pour } r \geq 0\,,\\
&N'_\infty = N_\infty \cap J_\infty(W) = N_\infty \cap J_\infty(V)\,.
\end{aligned}$$

Si de plus V est intégrable et N_k est une équation de Lie, ou si $N_{k+1} \subset R_{k+1}$, alors N'_{k_0} est une équation de Lie et W est un sous-fibré intégrable de V.

(iii) *Supposons que R_{k+1} soit formellement intégrable. Soient R'_{k_0} l'équation de Lie formellement intégrable dans $J_{k_0}(T)$ et W le sous-fibré intégrable de V donnés par* (ii) *tels que $R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(V)$ et $\pi_0 \tilde{R}'_{k_0} = W$. Pour tout $x \in X$, l'idéal fermé $R'_{\infty,x}$ de $R_{\infty,x}$ est défini par le feuilletage $J_0(W)_x$ dans $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$. De plus, si X est simplement connexe, l'équation de Lie R'_{k_0} coincide avec celle donnée par le théorème* 10.1 (iii) *à partir de l'idéal fermé $R'_{\infty,x}$ de $R_{\infty,x}$ et de R_k.*

Démonstration. (i) Les fibrés N_k et $J_k(V)$ sont stables par la dérivée covariante induite dans $J_k(T)$ par une R_{k+1}-connexion sans courbure; donc d'après la proposition 3.2, $\bar{N}_k$ est un fibré vectoriel. Si V est intégrable, alors $[\tilde{J}_k(\mathscr{V}), \tilde{J}_k(\mathscr{V})] \subset \tilde{J}_k(\mathscr{V})$. Donc si N_k est une équation de Lie et V est intégrable, $\bar{N}_k$ est aussi une équation de Lie.

(ii) Si R_{k+1} est formellement intégrable, alors $\bar{N}_{k+l} = N_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$ est un fibré vectoriel d'après (i), le lemme 10.3 (iii) et le lemme 10.5, et

$$[\bar{\mathscr{R}}_{k+l+1}, \bar{\mathscr{N}}_{k+l}] \subset \bar{\mathscr{N}}_{k+l} \tag{10.11}$$

d'après (10.4) et le lemme 10.3 (iii). Le lemme 10.3 (ii) nous dit alors que l'application

$$\pi_m : \bar{N}_{k+l} \to J_m(T) ,$$

pour $l \geq 0$ et $0 \leq m \leq k + l$, est de rang constant. D'après [20, § 4] nous avons

$$\bar{N}_{k+l+1} = (\bar{N}_{k+l})_{+1} , \qquad \text{pour } l \geq 0 .$$

Il existe donc d'après le théorème 1 de [20] des entiers $k_0 \geq k$, $l_0 \geq 0$ tels que l'équation différentielle $N'_{k_0} = \pi_{k_0}\bar{N}_{k_0+l_0}$ soit formellement intégrable et $N'_{k_0+l} = \pi_{k_0+l}\bar{N}_{k_0+l_0+l}$ soit le l-ième prolongement de N'_{k_0} et $N'_\infty = \varprojlim N'_{k_0+l} = \varprojlim \bar{N}_{k+l} = R_\infty \cap J_\infty(V)$. On a évidement

$$[\bar{\mathscr{R}}_{m+1}, \mathscr{N}'_m] \subset \mathscr{N}'_m$$

pour $m \geq k_0$, d'après (10.11). D'après le lemme 10.3 (ii), l'image de $\bar{\bar{N}}_{k_0+l_0}$ ou de $\tilde{N}'_{k_0}$ dans T est un sous-fibré W de V tel que $[\bar{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{W})] \subset J_0(\mathscr{W})$ et $N'_m \subset J_m(W)$ pour $m \geq k_0$. Si $N_{k+1} \subset R_{k+1}$, alors $N'_m \subset N_m \subset R_m$, pour $m \geq \sup(k_0, k + 1)$. Donc N'_{k_0} est une équation de Lie d'après le lemme 10.3 (ii), de sorte que W est un sous-fibré intégrable de V. Si V est intégrable et N_k est une équation de Lie, d'après (i), N'_{k_0} est une équation de Lie et W est donc un sous-fibré intégrable de V.

(iii) Si X est simplement connexe et $x \in X$, puisque l'équation de Lie formellement intégrable $R'_{k_0} \subset R_{k_0}$ vérifie $[\bar{\mathscr{R}}_{k_0+1}, \mathscr{R}'_{k_0}] \subset \mathscr{R}'_{k_0}$, elle coincide avec l'équation de Lie donnée par le théorème 10.1 (iii) à partir de R_k et de l'idéal fermé $R_{\infty,x} \cap J_\infty(V)_x$ de $R_{\infty,x}$. Puisque $R'_{\infty,x} = R_{\infty,x} \cap J_\infty(W)_x$, d'après le théorème 10.1 (iv), $R'_{\infty,x}$ est défini par le feuilletage $J_0(W)_x$ dans $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$.

Soit R_k une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$. On note R_{k+l} le l-ième prolongement de R_k. Pour $m < k$, on pose $R_m = \pi_m R_k$. Soit $\mathscr{S}(R_k)$ l'ensemble des équations de Lie R'_m formellement intégrables d'ordre quelconque $m \geq k$ dans T telles que

$$R'_m \subset R_m \quad \text{et} \quad [\bar{\mathscr{R}}_{m+1}, \mathscr{R}'_m] \subset \mathscr{R}'_m ,$$

et soit $\mathscr{F}(R_k)$ la partie de $\mathscr{I}(R_k)$ des équations $R'_m \in \mathscr{I}(R_k)$ pour lesquelles il existe un sous-fibré intégrable V de T tel que

$$[\mathscr{R}_1, J_0(\mathscr{V})] \subset J_0(\mathscr{V}) \ , \quad \pi_0(R'_m) = J_0(V) \ , \quad R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(V) \ .$$

Si $x \in X$, soient $\mathscr{I}(R_{\infty,x})$ l'ensemble des idéaux fermés de l'algèbre de Lie transitive $R_{\infty,x}$ et $\mathscr{F}(R_{\infty,x})$ la partie de ces idéaux qui sont définis par un feuilletage dans $(R_{\infty,x}, R^0_{\infty,x})$. Le lemme 10.3 nous donne une application

$$\mathscr{I}(R_k) \to \mathscr{I}(R_{\infty,x}) \ , \tag{10.12}$$

qui envoie R'_m dans $R'_{\infty,x} = \varprojlim R'_{m+l,x}$. D'après la proposition 10.3 (iii), l'image de $\mathscr{F}(R_k)$ par cette application est contenue dans $\mathscr{F}(R_{\infty,x})$.

Le théorème 10.1 et la proposition 10.3 (iii) impliquent que:

Corollaire 10.2. *Si R_k est une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$ sur une variété simplement connexe X et $x \in X$, alors l'application* (10.12) *est surjective et deux équations de Lie R'_m, $R''_p \in \mathscr{I}(R_k)$ ont la même image dans $\mathscr{I}(R_{\infty,x})$ si et seulement si l'une de ces équations est le prolongement de l'autre. De plus, l'application $\mathscr{F}(R_k) \to \mathscr{F}(R_{\infty,x})$ induite par* (10.12) *est surjective.*

11. Equations de Lie projetables

Soit Y une variété différentiable dont on note T_Y le fibré tangent. Soient $\rho: X \to Y$ une submersion surjective et V le sous-fibré intégrable de $T = T_X$ des vecteurs tangents aux fibres de ρ. Alors

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}T_Y \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels sur X. Soient E et F des fibrés sur X et Y respectivement et $\varphi: E \to F$ un morphisme de fibrés sur ρ. On dira qu'une section s de E sur $U \subset X$ est φ-projetable si $\varphi s(a) = \varphi s(b)$, pour $a, b \in U$ avec $\rho(a) = \rho(b)$. Alors la section φs de F sur $\rho(U)$, qui à $y \in \rho(U)$ fait correspondre $\varphi s(a)$, où $a \in U$ vérifie $\rho(a) = y$, est bien définie. On notera $\mathscr{E}_\varphi$ le faisceau de sections de E qui sont φ-projetables et $J_k(E; \varphi) \subset J_k(E)$ l'ensemble des k-jets de sections de $\mathscr{E}_\varphi$; si $\varphi: E \to F$ est de rang constant, c'est un fibré, et si de plus E, F sont des fibrés vectoriels et φ est un morphisme de fibrés vectoriels, c'est un fibré vectoriel. On notera $\mathscr{F}, \mathscr{F}_X$ les faisceaux de sections de F sur Y et de $\rho^{-1}F$ sur X respectivement. Si $J_k(F; Y)$ est le fibré des k-jets de sections de F sur Y, on a une application

$$\varphi: J_k(E; \varphi) \to J_k(F; Y) \ . \tag{11.1}$$

Prenons $E = T$, $F = T_Y$ et $\varphi = \rho$. Le fibré $J_k(T; \rho)$ est une équation de Lie formellement transitive dans $J_k(T)$. L'application (11.1) nous donne des projections

$$\rho: J_k(T\,;\rho) \to J_k(T_Y\,;Y)\,, \qquad \rho: \tilde{J}_k(T\,;\rho) \to \tilde{J}_k(T_Y\,;Y)\,,$$

et les suites exactes

$$(11.2) \qquad 0 \longrightarrow J_k(V) \longrightarrow J_k(T\,;\rho) \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}J_k(T_Y\,;Y) \longrightarrow 0\,,$$

$$(11.3) \qquad 0 \longrightarrow J_k(\mathscr{V}) \longrightarrow J_k(\mathscr{T}\,;\rho)_\rho \xrightarrow{\rho} J_k(\mathscr{T}_Y) \longrightarrow 0\,.$$

On a

$$(11.4) \qquad [\tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T}\,;\rho), J_k(\mathscr{V})] \subset J_k(\mathscr{V})\,,$$

et si $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T})$ vérifie $[\tilde{\xi}, J_k(\mathscr{V})] \subset J_k(\mathscr{V})$, alors $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T}\,;\rho)$. D'où d'après le lemme 10.5:

Lemme 11.1. *Soit R_k une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable dans $J_k(T)$ dont on note R_1 l'image dans $J_1(T)$. Alors $[\tilde{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{V})] \subset J_0(\mathscr{V})$ si et seulement si $R_k \subset J_k(T\,;\rho)$. Si l'une de ces conditions est vérifiée, $(R_k)_{+l} \subset J_{k+l}(T\,;\rho)$ pour $l \geq 0$.*

Si $\xi, \eta \in J_k(T\,;\rho)$, alors

$$(11.5) \qquad \rho[\xi, \eta] = [\rho\xi, \rho\eta]\,,$$

et si $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho)_\rho$, alors $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] \in \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho)_\rho$ et

$$(11.6) \qquad \rho[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = [\rho\tilde{\xi}, \rho\tilde{\eta}]\,;$$

de plus, si $\eta' = \nu\pi_{k-1}\tilde{\eta}$, alors $[\tilde{\xi}, \eta'] \in J_{k-1}(\mathscr{T}\,;\rho)_\rho$ et

$$(11.7) \qquad \rho[\tilde{\xi}, \eta'] = [\rho\tilde{\xi}, \rho\eta']\,.$$

Soit $F^i_i(T\,;\rho)_k$ l'ensemble des éléments $u \in \bigwedge^i T^* \otimes J_k(T\,;\rho)$ vérifiant $i(\eta)u \in \bigwedge^{i-1} T^* \otimes J_k(V)$ pour tout $\eta \in V$; c'est un fibré vectoriel (cf. [20, § 4]) et on a une projection

$$\rho: F^i_i(T\,;\rho)_k \to \bigwedge^i T^*_Y \otimes J_k(T_Y\,;Y)\,,$$

définie par

$$(\rho u)(\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\xi}_i) = \rho(u(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_i))\,,$$

où $u \in F^i_i(T\,;\rho)_k$, $\xi_j \in T$ et $\rho(\xi_j) = \bar{\xi}_j \in T_Y$, $j = 1, \cdots, i$; si $u \in F^i_i(T\,;\rho)_k$, $v \in F^j_j(T\,;\rho)_k$, alors $[u, v] \in F^{i+j}_{i+j}(T\,;\rho)_{k-1}$ et

$$\rho[u, v] = [\rho u, \rho v]$$

d'après (11.5). On note $(\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho$ le sous-faisceau de $\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T}\,;\rho)$ de sections ρ-projetables de $F_i^i(\mathscr{T}\,;\rho)_k$; on a donc une application

$$\rho\colon (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho \to \bigwedge^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_k(\mathscr{T}_Y\,;Y)\ .$$

On écrit $J_0(T_Y) = J_0(T_Y\,;Y)$ et

$$(\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho = (\nu^{-1*} \otimes \nu^{-1})(\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho\ .$$

On a donc une application

$$\rho\colon (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho \to \bigwedge^i J_0(\mathscr{T}_Y)^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}_Y\,;Y)\ .$$

Si $u \in (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho$, $v \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho$, alors $[u, v] \in (\bigwedge^{i+j} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho$ et

$$\rho[u, v] = [\rho u, \rho v]\ . \tag{11.8}$$

Si $R_k \subset J_k(T\,;\rho)$ est une équation différentielle et s'il existe une équation différentielle $R_k'' \subset J_k(T_Y\,;Y)$ telle que $\rho(R_{k,a}) = R''_{k,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$, alors $\rho\colon (\mathscr{R}_k)_\rho \to \mathscr{R}_k''$ est surjectif; si, de plus R_k est une équation de Lie, alors d'après (11.6) R_k'' l'est aussi, et R_k'' est formellement transitive si R_k l'est. On note R_{k+l} le l-ième prolongement de R_k.

Définition. Une équation différentielle $R_k \subset J_k(T\,;\rho)$ est ρ-projetable si pour tout $l \geq 0$, R_{k+l} est un fibré vectoriel et s'il existe une équation différentielle $R''_{k+l} \subset J_{k+l}(T_Y\,;Y)$ telle que $\rho(R_{k+l,a}) = R''_{k+l,\rho(a)}$, pour tout $a \in X$.

Le résultat suivant est notre version du théorème de Kuranishi-Rodrigues [23] pour les équations de Lie (cf. Rodrigues [25]).

Théorème 11.1. *Supposons que les fibres de ρ soient connexes. Soit $R_k \subset J_k(T\,;\rho)$ une équation de Lie formellement intégrable. Si $R_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$ est un fibré vectoriel pour tout $l \geq 0$, alors R_k est ρ-projectable.*

Démonstration. Pour $l \geq 0$, montrons d'abrod que l'équation différentielle $R_{k+l} + J_{k+l}(V)$ dans $J_{k+l}(T)$ est une équation de Lie. En effet, si $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_{k+l+1}$, $\eta \in J_{k+l}(\mathscr{V})$, on a

$$[\pi_{k+l}\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = \nu^{-1}\mathscr{L}(\xi)\eta - (\pi_0\eta) \barwedge \bar{D}\tilde{\xi} \in \tilde{J}_{k+l}(\mathscr{V}) + \tilde{\mathscr{R}}_{k+l}\ ,$$

où $\tilde{\eta} = \nu^{-1}\eta$, d'après (9.2) et (11.4). D'autre part, il est clair que

$$R_{k+l+1} + J_{k+l+1}(V) \subset (R_{k+l} + J_{k+l}(V))_{+1}\ .$$

Soit $P^\sharp_{k+l+1}$ une forme finie de $R_{k+l+1} + J_{k+l+1}(V)$. Le fibré $Q_{k+l+1}(V)$ des jets d'ordre $k + l + 1$ inversibles d'applications $X \to X$ qui sont ρ-projetables et induisent l'identité sur Y est une forme finie de $J_{k+l+1}(V)$ et l'on a donc $Q_{k+l+1}(V) \subset P^\sharp_{k+l+1}$ au voisinage de I_{k+l+1}. Soient $y \in Y$, $X_y = \rho^{-1}(y)$. Si $a \in X_y$, la projection "but": $Q_{k+l+1}(V)(a) \to X_y$ est une submersion. Il existe donc un voisinage $U \subset X_y$ de a tel que, pour tout $b \in U$, l'on ait un élément $\phi \in P^{\#}_{k+l+1} \cap Q_{k+l+1}(V)(a)$ avec but $\phi = b$. Comme X_y est connexe, pour tous $a, b \in X_y$, il existe donc $\phi \in P^{\#}_{k+l+1} \cap Q_{k+l+1}(V)$ avec source $\phi = a$, but $\phi = b$; on a

$$\phi(R_{k+l,a}) \subset R_{k+l,b} + J_{k+l}(V)_b \, , \tag{11.9}$$
$$\phi(J_{k+l}(T\,;\rho)_a) \subset J_{k+l}(T\,;\rho)_b \, ,$$

et $\rho\phi = \rho$ en tant qu'applications de $J_{k+l}(T\,;\rho)_a$ dans $J_{k+l}(T_Y\,;Y)_{\rho(a)}$. De (11.9), on déduit l'égalité

$$\rho(R_{k+l,a}) = \rho(R_{k+l,b}) \, .$$

Comme $R_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$ est un fibré vectoriel, la dimension de $\rho(R_{k+l,a})$ est indépendante de $a \in X$. On obtient donc un sous-fibré vectoriel R''_{k+l} de $J_{k+l}(T_Y\,;Y)$ avec $R''_{k+l,y} = \rho(R_{k+l,x})$, si $y \in Y$, $x \in X$ vérifient $\rho(x) = y$.

Corollaire 11.1. *Si X et les fibres de ρ sont connexes, toute équation de Lie $R_k \subset J_k(T\,;\rho)$ formellement transitive et formellement intégrable est ρ-projetable.*

Démonstration. D'après la proposition 10.3 (i), $R_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$ est un fibré vectoriel pour tout $l \geq 0$.

Proposition 11.1. *Soient $R_{k+1} \subset J_{k+1}(T\,;\rho)$ une équation de Lie formellement transitive et $N_k \subset J_k(T\,;\rho)$ une équation différentielle telle que*

$$[\mathscr{R}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k \, .$$

Supposons qu'il existe une équation différentielle $R''_{k+1} \subset J_{k+1}(T_Y\,;Y)$ telle que $\rho(R_{k+1,a}) = R''_{k+1,\rho(a)}$, pour tout $a \in X$, et que X soit connexe.

(i) *S'il existe une équation différentielle $N''_k \subset J_k(T_Y\,;Y)$ et $x \in X$ tels que $[\mathscr{R}''_{k+1}, \mathscr{N}''_k] \subset \mathscr{N}''_k$ et $\rho(N_{k,x}) = N''_{k,\rho(x)}$, alors $\rho(N_{k,a}) = N''_{k,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$.*

(ii) *Si $\pi_k : N_{k+1} \to N_k$ est surjectif, où $N_{k+1} = (N_k)_{+1}$, il existe une équation différentielle $N''_k \subset J_k(T_Y\,;Y)$ telle que $[\mathscr{R}''_{k+1}, \mathscr{N}''_k] \subset \mathscr{N}''_k$ et $\rho(N_{k,a}) = N''_{k,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$.*

Démonstration. (i) Le noyau $\bar{N}_k = N_k \cap J_k(V)$ de $\rho : N_k \to \rho^{-1}J_k(T_Y\,;Y)$ est un fibré vectoriel d'après la proposition 10.3 (i). Il en résulte que la suite

$$0 \longrightarrow \bar{N}_k \longrightarrow N_k \xrightarrow{\rho} \rho N_k \longrightarrow 0$$

est exacte et ρN_k est un sous-fibré de $\rho^{-1}J_k(T_Y\,;Y)$. Montrons l'égalité des sous-fibrés ρN_k et $\rho^{-1}N''_k$ de $\rho^{-1}J_k(T_Y\,;Y)$. De la suite exacte (11.2) et de (11.4), on déduit par passage au quotient un crochet

$$[\tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T}\,;\rho), J_k(\mathscr{T}_Y\,;Y)_X] \subset J_k(\mathscr{T}_Y\,;Y)_X$$

et que la dérivée covariante dans $J_k(T\,;\rho)$ induite par une R_{k+1}-connexion sans courbure nous donne une dérivée covariante ∇ sans courbure dans le fibré $\rho^{-1}J_k(T_Y\,;Y)$ sur X. Vérifions que ρN_k et $\rho^{-1}N''_k$ sont stables par ∇. Puisque $[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k$, c'est vrai pour ρN_k. Puisque $[\bar{\mathscr{R}}''_{k+1}, \mathscr{N}''_k] \subset \mathscr{N}''_k$ et $(\mathscr{N}_k)_X = \mathscr{N}''_k \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$, d'après (11.7) on a

$$[(\mathscr{R}_{k+1})_\rho, (\mathscr{N}''_k)_X] \subset (\mathscr{N}''_k)_X \;.$$

Comme $\mathscr{R}_{k+1} = (\mathscr{R}_{k+1})_\rho \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$, on a donc

$$[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, (\mathscr{N}''_k)_X] \subset (\mathscr{N}''_k)_X \;,$$

et $\rho^{-1}N''_k$ est stable par ∇. Comme les fibres en x de ρN_k et $\rho^{-1}N''_k$ sont égales, l'égalité $\rho N_k = \rho^{-1}N''_k$ découle du lemme 10.3 (i), et on a la suite exacte de fibrés vectoriels sur X

$$0 \longrightarrow \bar{N}_k \longrightarrow N_k \xrightarrow{\;\rho\;} \rho^{-1}N''_k \longrightarrow 0 \;.$$

(ii) Soient x un point quelconque de X et $y = \rho(x)$. Soit E_x le sous-espace $\rho N_{k,x}$ de $J_k(T_Y\,;Y)_y$. D'après le lemme 10.3 (ii), on a $[R_{k+1}, N_{k+1}] \subset N_k$. Puisque $\pi_k\colon N_{k+1} \to N_k$ est surjectif, on a $[R''^{0}_{k+1,y}, E_x] \subset E_x$ d'après (11.5). Donc d'après le lemme 10.4, il existe une équation différentielle $N''_k \subset J_k(T_Y\,;Y)$ sur un voisinage U de $y \in Y$ telle que $[\bar{\mathscr{R}}''_{k+1}, \mathscr{N}''_k] \subset \mathscr{N}''_k$ et $N''_{k,y} = E_x$. D'après (i), on a alors $\rho(N_{k,a}) = N''_{k,\rho(a)}$ pour $a \in \rho^{-1}(U)$. Puisque x était quelconque, il existe un fibré vectoriel $N''_k \subset J_k(T_Y\,;Y)$ sur Y tout entier tel que $[\bar{\mathscr{R}}''_{k+1}, \mathscr{N}''_k] \subset \mathscr{N}''_k$ et $\rho(N_{k,a}) = N''_{k,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$.

Soient $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\geq 0} \mathfrak{g}^j$, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{j\geq 0} \mathfrak{h}^j$ des algèbres de Lie graduées. Rappelons que $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\geq 0} \operatorname{Der}^j \mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie graduée, où $\operatorname{Der}^j \mathfrak{g}$ est le sous-espace des dérivations de degré j de $\mathfrak{g}$. Soient

$$\lambda\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \;, \qquad \mu\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{h}$$

des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées ; nous dirons que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont entrelacées par λ et μ si μ détermine une structure de $\mathfrak{g}$-module gradué sur $\mathfrak{h}$ et si l'on a

$$\mu(\lambda(\alpha))\cdot\beta = [\alpha, \beta] \qquad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathfrak{h} \;,$$
$$\lambda(\mu(\alpha)\cdot\beta) = [\alpha, \lambda(\beta)] \qquad \text{pour tous } \alpha \in \mathfrak{g}, \beta \in \mathfrak{h} \;.$$

Théorème 11.2. *Supposons que X soit connexe. Soit $R_{k+1} \subset J_{k+1}(T\,;\rho)$ une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable ρ-projetable. Pour $l \geq 1$, soit $R''_{k+l} \subset J_{k+l}(T_Y\,;Y)$ l'équation de Lie telle que $\rho(R_{k+l,a}) = R''_{k+l,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$. Soit $N_k \subset J_k(T\,;\rho)$ une équation différentielle formellement intégrable telle que*

$$[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k \ .$$

(i) *Alors N_k est ρ-projetable et il existe une équation différentielle $N''_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Y; Y)$ formellement intégrable, avec $k_1 \geq k$, telle que $\rho(N_{k_1+l,a}) = N''_{k_1+l,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$ et $[\bar{\mathscr{R}}''_{k_1+l+1}, \mathscr{N}''_{k_1+l}] \subset \mathscr{N}''_{k_1+l}$ pour tout $l \geq 0$.*

(ii) *Si N'_{k_0} est l'équation différentielle formellement intégrable dans $J_{k_0}(T)$ donnée par la proposition 10.3 (ii) à partir de N_k et de V telle que $N'_\infty = N_\infty \cap J_\infty(V)$, alors, pour tout $x \in X$, la suite*

$$(11.10) \qquad 0 \longrightarrow N'_{\infty,x} \longrightarrow N_{\infty,x} \xrightarrow{\rho} N''_{\infty,\rho(x)} \longrightarrow 0$$

est exacte. L'inclusion $N'_\infty \subset N_\infty$ détermine une application

$$(11.11) \qquad \iota: H^*(N'_{k_0}) \to H^*(N_k)$$

et ρ une application

$$(11.12) \qquad \rho: H^*(N_k) \to H^*(N''_{k_1}) \ ,$$

et on a une suite exacte

$$(11.13) \qquad \cdots \longrightarrow H^j(N'_{k_0}) \xrightarrow{\iota} H^j(N_k) \xrightarrow{\rho} H^j(N''_{k_1}) \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(N'_{k_0}) \longrightarrow \cdots$$

de groupes de cohomologie de Spencer. Si $N'_\infty = 0$, alors l'application (11.12) *est un isomorphisme.*

(iii) *Si N_k est une équation de Lie, alors N'_{k_0} et N''_{k_1} sont des équations de Lie et les applications* (11.11) *et* (11.12) *sont des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées. De plus, nous avons un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées*

$$(11.14) \qquad \mu: H^*(N_k) \to \mathrm{Der}\, H^*(N'_{k_0}) \ ,$$

et $H^*(N_k)$ et $H^*(N'_{k_0})$ sont entrelacées par ι et μ.

Démonstration. (i) D'après la proposition 11.1 (ii), N_k est ρ-projetable; si $N_{k+l} = (N_k)_{+l}$, soit $N''_{k+l} \subset J_{k+l}(T_Y; Y)$ l'équation différentielle telle que $\rho(N_{k+l,a}) = N''_{k+l,\rho(a)}$ pour tout $a \in X$. On a $N''_{k+l+1} \subset (N''_{k+l})_{+1}$ pour $l \geq 0$ d'après [20, § 4] et, comme N_k est formellement intégrable, les applications $\pi_{k+l}: N''_{k+l+1} \to N''_{k+l}$ sont surjectives. Le théorème de Cartan-Kuranishi nous donne l'existence de l'entier $k_1 \geq k$.

(ii) Si $\bar{N}_{k+l} = N_{k+l} \cap J_{k+l}(V)$, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{N}_{k+l} \longrightarrow N_{k+l} \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}N''_{k+l} \longrightarrow 0 \ ,$$

on déduit l'exactitude de la suite (11.10). On pose

$$(\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m)_\rho = (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m) \cap (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_m(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho\,.$$

Pour $m \geq k + n$, nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{\tilde{\mathscr{N}}}_m \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d] & J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\tilde{\mathscr{N}}}_{m-1} \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \bigwedge^n J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\tilde{\mathscr{N}}}_{m-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\tilde{\mathscr{N}}_m)_\rho \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d, "\rho"] & (J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m-1})_\rho \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d, "\rho"] & \cdots \arrow[r] & (\bigwedge^n J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m-n})_\rho \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{\mathscr{N}}''_m \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d] & J_0(\mathscr{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}''_{m-1} \arrow[r, "\bar{D}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \bigwedge^n J_0(\mathscr{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}''_{m-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes et les lignes sont des complexes. Si $H^j_\rho(N_k)_{m-j}$ désigne la cohomologie de la deuxième ligne de ce diagramme en $(\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m-j})_\rho$ et si l'on pose $H^*_\rho(N_k)_m = \bigoplus_{j\geq 0} H^j_\rho(N_k)_m$, on obtient ainsi une application

$$\rho\colon H^*_\rho(N_k)_m \to H^*(N''_{k_1})_m \tag{11.15}$$

et une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^j(\bar{N}_k)_m \xrightarrow{\iota} H^j_\rho(N_k)_m \xrightarrow{\rho} H^j(N''_{k_1})_m \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(\bar{N}_k)_{m-1} \longrightarrow \cdots \tag{11.16}$$

pour $m \geq k_1 + n$, puisque $\bar{N}_{k+l} = (\bar{N}_k)_{+l}$ pour $l \geq 0$. D'après les théorèmes 2 et 3 de [20], il existe un entier $m_0 \geq k$ tels que les applications

$$H^*(N'_{k_0}) \xrightarrow{\sim} H^*(N'_{k_0})_m \xrightarrow{\sim} H^*(\bar{N}_k)_m\,, \tag{11.17}$$

$$H^*_\rho(N_k)_m \xrightarrow{\sim} H^*(N_k)_m \xrightarrow{\sim} H^*(N_k) \tag{11.18}$$

soient des isomorphismes pour tout $m \geq m_0$; à l'aide de ces isomorphismes, de (11.15) et de la suite exacte (11.16), on déduit l'application (11.12) et la suite exacte (11.13) du théorème 3 de [20]. Si $N'_\infty = 0$, l'équation différentielle N'_{k_0} est nulle et la suite exacte (11.13) nous dit que (11.12) est un isomorphisme.

(iii) Supposons que N_k soit une équation de Lie. Alors le crochet de $\bigwedge J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_m(\mathscr{T}\,;\rho)$ détermine une structure d'algèbre de Lie graduée sur

$H_\rho^*(N_k)_m = \bigoplus_{j\geq 0} H_\rho^j(N_k)_m$ et l'application (11.18) est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées. D'après (11.8), l'application (11.15) est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées et à l'aide du § 3 de [20], on voit que (11.17) l'est aussi. Donc les applications (11.11) et (11.12), qui sont des composées des applications précédentes, sont aussi des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées. Si $u \in (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m)_\rho$, $v \in \bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}_m$, alors d'après (11.8) on a $[u, v] \in \bigwedge^{i+j} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}_m$, d'où un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$H_\rho^*(N_k)_m \to \operatorname{Der} H^*(\bar{N}_k)_m$$

dont on déduit l'homomorphisme μ à l'aide de (11.17) et de (11.18). On vérifie aisément que ι et μ entrelacent $H^*(N_k)$ et $H^*(N'_{k_0})$.

Remarque. Les formules (9.11) et (9.12) montrent que les homomorphismes (11.14) obtenus à partir des crochets (9.3) et (9.4) sont les mêmes.

Remarque. Le théorème 11.2 (ii) nous donne une suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} (11.19) \qquad \cdots \longrightarrow H^j(R'_{k_0}) \longrightarrow H^j(R_{k+1}) &\xrightarrow{\rho} H^j(R''_{k_1}) \\ &\longrightarrow H^{j+1}(R'_{k_0}) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

où $R'_{k_0} \subset J_{k_0}(V)$ est l'équation de Lie formellement intégrable donnée par la proposition 10.3 (ii) telle que $R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(V)$, et $R''_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Y; Y)$ est l'équation de Lie formellement intégrable qu'on obtient à partir des équations de Lie R''_{k+l}. Si X et Y sont des variétés analytiques réelles, $\rho: X \to Y$ est une submersion analytique, et R_{k+1} une équation analytique, et si l'on considère les groupes de cohomologie de Spencer $H_\omega^j(R_{k+1})$ obtenus à partir des sections analytiques des fibrés, alors $H_\omega^j(R'_{k_0}) = H_\omega^j(R_{k+1}) = 0$ pour $j > 0$. De la suite (11.19) pour ces groupes de cohomologie, on déduit la surjectivité de l'application

$$\rho: H_\omega^0(R_{k+1})_x \to H_\omega^0(R''_{k_1})_{\rho(x)}$$

pour tout $x \in X$, et l'on obtient un résultat de Rodrigues [25].

Nous dirons qu'une équation de Lie $R_k \subset J_k(T; \rho)$ formellement intégrable et ρ-projetable est un prolongement de l'équation de Lie $R''_{k''} \subset J_{k''}(T_Y; Y)$ formellement intégrable si $\rho(R_{m,a}) = R''_{m,\rho(a)}$ pour tous $a \in X$ et $m \geq \sup(k, k'')$ et si $\rho: R_{\infty,a} \to R''_{\infty,\rho(a)}$ est un isomorphisme pour tout $a \in X$. Si R_k et $R''_{k''}$ sont formellement transitives, l'équation de Lie R'_{k_0} donnée par la proposition 10.3 (ii) à partir de R_k et de V est nulle et le théorème 11.2 (ii) et (iii) nous dit alors que ρ définit un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\rho: H^*(R_k)_a \to H^*(R''_{k''})_{\rho(a)}$$

pour tout $a \in X$.

En prenant $Y = X$ et ρ l'application identité de X, on voit que le l-ième prolongement R_{k+l} d'une équation $R_k \subset J_k(T)$ formellement intégrable est en fait un prolongement tel qu'il est défini ci-dessus.

Si $\rho: X \to Y$ est un difféomorphisme, alors $J_k(T;\rho) = J_k(T)$ et $\rho: J_k(T)_x \to J_k(T_Y; Y)_{\rho(x)}$ est l'isomorphisme $\tilde{j}_{k+1}(\rho)(x)$, et toute équation différentielle $R_k \subset J_k(T)$ dont les prolongements R_{k+l} sont des fibrés vectoriels est ρ-projetable.

Si $R_k, R_k^\#$ sont deux équations de Lie dans $J_k(T)$ et $x, x^\# \in X$, nous dirons que (R_k, x) et $(R_k^\#, x^\#)$ sont localement isomorphes sur X s'il existe un difféomorphisme local f de X défini sur un voisinage U de x tel que $f(x) = x^\#$ et

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(R_{k|U}) = R^\#_{k|f(U)} .$$

On a alors

$$\tilde{j}_{k+l+1}(f)(R_{k+l|U}) = R^\#_{k+l|f(U)}$$

pour tout $l \geq 0$ et $\tilde{j}_\infty(f)(x)(R_{\infty,x}) = R^\#_{\infty,x^\#}$; si R_k est formellement intégrable, R_k est un prolongement de $R_k^\#$.

La proposition 11.1 (i) nous donne:

Proposition 11.2. *Soient $R_k, R_k^\#$ deux équations de Lie formellement transitives et formellement intégrables dans $J_k(T)$ et f un difféomorphisme local de X défini sur un voisinage connexe U de $x \in X$ tels que*

$$\tilde{j}_{k+2}(f)(R_{k+1|U}) = R^\#_{k+1|f(U)} .$$

Si $N_k, N_k^\#$ sont des équations différentielles dans $J_k(T)$ telles que

$$[\mathscr{R}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k , \qquad [\mathscr{R}^\#_{k+1}, \mathscr{N}^\#_k] \subset \mathscr{N}^\#_k ,$$

et si

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(x)(N_{k,x}) = N^\#_{k,f(x)} ,$$

alors

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(N_{k|U}) = N^\#_{k|f(U)}$$

et f définit un isomorphisme

$$f: H^*(N_k)_a \to H^*(N_k^\#)_{f(a)}$$

pour tout $a \in U$, qui est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées si N_k est une équation de Lie.

Soient Z une variété différentiable et $\sigma: Y \to Z$ une submersion surjective; alors $\tau = \sigma \circ \rho: X \to Z$ est une submersion surjective et on a

(11.20) $\quad J_m(T\,;\rho) \cap J_m(T\,;\tau) = \{u \in J_m(T\,;\rho) \,|\, \rho u \in J_m(T_Y\,;Y\,;\sigma)\}$,

(11.21) $$\rho(J_m(T\,;\rho) \cap J_m(T\,;\tau)) \subset J_m(T_Y\,;Y\,;\sigma) \,.$$

Théorème 11.3. *Soient $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et $R'_{k_0} \in \mathscr{F}(R_k)$ et W le sous-fibré intégrable de T tels que*

$$\pi_0 \tilde{R}'_{k_0} = W\,, \qquad R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(W)\,.$$

(i) *Si $x \in X$, en remplaçant X au besoin par un voisinage de x, il existe une variété différentiable Z, une submersion $\sigma : X \to Z$, une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable $R^\sharp_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Z\,;Z)$, avec $k_1 \geq k$, telles que W soit le sous-fibré de T des vecteurs tangents aux fibres de σ et telles que R_k soit σ-projetable et*

(11.22) $$\sigma(R_{k_1+l,a}) = R^\sharp_{k_1+l,\sigma(a)}$$

pour tous $a \in X$ et $l \geq 0$.

(ii) *Soit $\rho : X \to Y$ une submersion telle que R_k soit ρ-projetable et, si V est le fibré des vecteurs tangents aux fibres de ρ, telle que*

$$R'_\infty \subset R_\infty \cap J_\infty(V)\,.$$

Si $R''_{k_2} \subset J_{k_2}(T_Y\,;Y)$ est une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable, avec $k_2 \geq k_1$, telle que

$$\rho(R_{k_2+l,a}) = R''_{k_2+l,\rho(a)}$$

pour tous $a \in X$ et $l \geq 0$, il existe une submersion $\tau : Z \to Y$ définie sur un voisinage U de $\sigma(x)$ telle que le diagramme

(11.23) $$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ Z \arrow[r, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif et $R^\sharp_{k_1}$ soit τ-projetable et

$$\tau(R^\sharp_{k_2+l,b}) = R''_{k_2+l,\tau(b)}$$

pour tous $b \in U$ et $l \geq 0$. Si $R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(V)$, alors $R^\sharp_{k_1}$ est un prolongement de R''_{k_2}.

Démonstration. (i) L'existence de σ au voisinage de x, telle que W soit le sous-fibré de T des vecteurs tangents aux fibres de σ, résulte du théorème de Frobenius. Puisque $[\bar{\mathscr{R}}_1, J_0(\mathscr{W})] \subset J_0(\mathscr{W})$, on a $R_k \subset J_k(T\,;\sigma)$ d'après le lemme 11.1, et, en remplaçant X par un voisinage de x, d'après le théorème 11.1, R_k est σ-projetable. Du théorème 11.2 (i), on déduit l'existence de l'équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable $R^{\#}_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Z\,; Z)$ vérifiant (11.22).

(ii) Puisque $W \subset V$, le théorème de Frobenius nous donne des variétés différentiables Y_1, Z_1, des submersions surjectives $\rho_1: X \to Y_1$, $\sigma_1: X \to Z_1$ définies sur un voisinage de x et une submersion surjective $\tau_1: Z_1 \to Y_1$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\rho_1"] & \\ Z_1 \arrow[r, "\tau_1"] & Y_1 \end{tikzcd}$$

soit commutatif et que V soit le fibré des vecteurs tangents aux fibres de ρ_1 et W le fibré des vecteurs tangents aux fibres de σ_1. Comme les dimensions de Y et de Y_1 sont les mêmes, il existe des difféomorphismes $f: X \to X$ défini sur un voisinage U_1 de x et $f_1: Y_1 \to Y$ défini sur un voisinage de $\rho_1(x)$ tels que $f(x) = x$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1"] & X \arrow[d, "\rho"] \\ Y_1 \arrow[r, "f_1"] & Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On en déduit que $\tilde{j}_1(f)(a)(J_0(V)_a) = J_0(V)_{f(a)}$, pour tout $a \in U_1$, et il en suit que f est ρ-projetable; c'est-à-dire, il existe un difféomorphisme $f_2: Y \to Y$ défini sur un voisinage de $\rho(x)$ tel que $\rho \circ f = f_2 \circ \rho$ et $f_2(\rho(x)) = \rho(x)$. Par conséquent, $f_2^{-1} \circ f_1 \circ \tau_1: Z_1 \to Y$ est une submersion définie sur un voisinage de $\sigma_1(x)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ Z_1 \arrow[r, "f_2^{-1}\circ f_1\circ\tau_1"] & Y \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Les mêmes méthodes nous donnent un difféomorphisme $g: Z \to Z_1$ défini au voisinage de $\sigma(x)$ tel que $g(\sigma(x)) = \sigma_1(x)$ et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[d, "\sigma_1"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Z_1 \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On pose $\tau = f_2^{-1} \circ f_1 \circ \tau_1 \circ g$ et on obtient ainsi une submersion $\tau : Z \to Y$ définie sur un voisinage de $\sigma(x)$ telle que le diagramme (11.23) soit commutatif. Remplaçons X par un voisinage de x et Z par un voisinage de $\sigma(x)$ de sorte que σ soit surjectif et τ soit défini sur Z tout entier. D'après (11.21), on a $R^\sharp_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Z\,; Z\,; \tau)$, et d'après (11.22) et (11.23)

$$\tau(R^\sharp_{k_2+l,\sigma(a)}) = \rho(R_{k_2+l,a}) = R''_{k_2+l,\rho(a)}$$

pour tous $a \in X$ et $l \geq 0$. Donc $R^\sharp_{k_1}$ est τ-projetable et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R_{\infty,a} \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ R^\sharp_{\infty,\sigma(a)} \arrow[r, "\tau"] & R''_{\infty,\rho(a)} \end{tikzcd}$$

pour tout $a \in X$, où τ est un épimorphisme. Si $R'_\infty = R_\infty \cap J_\infty(V)$, on voit que $R'_{\infty,a}$ est le noyau des épimorphismes σ et ρ de ce diagramme, de sorte que $\tau : R^\sharp_{\infty,\sigma(a)} \to R''_{\infty,\rho(a)}$ est un isomorphisme pour tout $a \in X$, et $R^\sharp_{k_1}$ est un prolongement de R''_{k_2}.

Soit $F_i^{i+j}(\rho)$ le sous-fibré $\rho^* \bigwedge^i T_Y^* \wedge \bigwedge^j T^*$ de $\bigwedge^{i+j} T^*$, pour $j \geq 0$; on pose $F_i^{i+j}(\rho) = F_{i+j}^{i+j}(\rho)$ pour $j < 0$. Alors $F_{i+1}^{i+j}(\rho) \subset F_i^{i+j}(\rho)$ et $F_0^j(\rho) = \bigwedge^j T^*$. Si $R_m \subset J_m(T\,; \rho)$, $R''_m \subset J_m(T_Y\,; Y)$ sont des équations différentielles telles que

$$\rho(R_{m,a}) = R''_{m,\rho(a)}$$

pour tout $a \in X$, on pose pour $j \geq 0$

$$F_i^{i+j}(R_m\,; \rho) = \{u \in \textstyle\bigwedge^{i+j} T^* \otimes R_m \mid (\mathrm{id} \otimes \rho)u \in F_i^{i+j}(\rho) \otimes_X R''_m\} .$$

Si on pose $F_i^{i+j}(R_m\,; \rho) = \bigwedge^{i+j} T^* \otimes (R_m \cap J_m(V))$, pour $j < 0$, alors

$$F_0^j(R_m\,; \rho) = \textstyle\bigwedge^j T^* \otimes R_m\,, \qquad F_{i+1}^{i+j}(R_m\,; \rho) \subset F_i^{i+j}(R_m\,; \rho)\,,$$
$$F_i^{i+j}(\rho) \otimes R_m \subset F_i^{i+j}(R_m\,; \rho)\,,$$

et la suite

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow F_{i+1}^{i+j}(R_m\,; \rho) \longrightarrow F_i^{i+j}(R_m\,; \rho)& \\ \xrightarrow{\rho} \textstyle\bigwedge^j V^* \otimes_X (\bigwedge^i T_Y^* \otimes R''_m) \longrightarrow 0& \end{aligned} \tag{11.24}$$

est exacte pour $j \geq 0$, où ρ envoie $u \in F_i^{i+j}(R_m\,;\rho)$ dans l'élément ρu défini par

$$(\rho u)(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_j \otimes \bar{\eta}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\eta}_i) = \rho(u(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_j \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_i)) \,, \tag{11.25}$$

avec $\xi_1, \cdots, \xi_j \in V$, $\eta_1, \cdots, \eta_i \in T$ et $\bar{\eta}_l = \rho(\eta_l) \in T_Y$ pour $1 \leq l \leq i$. On a

$$F_i^i(R_m\,;\rho) = (\bigwedge^i T^* \otimes R_m) \cap F_i^i(T\,;\rho)_m \,,$$

et pour $j = 0$, (11.25) définit une application

$$\rho\colon F_i^i(R_m\,;\rho) \to \bigwedge^i T_Y^* \otimes R''_m \,,$$

et

$$(\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_m)_\rho = (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_m) \cap (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_m(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho$$

est le faisceau des sections ρ-projetables de $F_i^i(R_m\,;\rho)$ (cf. [20, § 4]). On pose

$$(\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m)_\rho = (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{R}}_m) \cap (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_m(\mathscr{T}\,;\rho))_\rho \,.$$

On a $F_i^i(T\,;\rho)_m = F_i^i(J_m(T\,;\rho)\,;\rho)$ et la suite

$$0 \longrightarrow \bigwedge^i T^* \otimes J_m(V) \longrightarrow F_i^i(T\,;\rho)_m \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}(\bigwedge^i T_Y^* \otimes J_k(T_Y\,;Y)) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Soient Z une variété différentiable et $\sigma\colon Y \to Z$ une submersion surjective; on pose $\tau = \sigma \circ \rho\colon X \to Z$. Soient W et V' les sous-fibrés de T et T_Y des vecteurs tangents aux fibres de τ et de σ respectivement. Alors $J_m(W\,;\rho)$ est l'image inverse par l'application $\rho\colon J_m(T\,;\rho) \to \rho^{-1}J_m(T_Y\,;Y)$ de $\rho^{-1}J_m(V'\,;Y)$, et la suite

$$0 \longrightarrow J_m(V) \longrightarrow J_m(W\,;\rho) \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}J_m(V'\,;Y) \longrightarrow 0$$

est exacte. Montrons que

$$F_i^i(T\,;\rho)_m \cap F_i^i(T\,;\tau)_m = \{u \in F_i^i(T\,;\rho)_m \mid \rho u \in F_i^i(T_Y\,;\sigma)_m\} \,, \tag{11.26}$$

où $F_i^i(T_Y\,;\sigma)_m \subset \bigwedge^i T_Y^* \otimes J_m(T_Y\,;Y\,;\sigma)$. En effet, soit $u \in F_i^i(T\,;\rho)_m$; alors $\rho u \in \bigwedge^i T_Y^* \otimes J_m(T_Y\,;Y)$, $i(\eta)u \in F_{i-1}^{i-1}(T\,;\rho)_m$ et $\rho(i(\eta)u) \in \bigwedge^{i-1} T_Y^* \otimes J_m(T_Y\,;Y)$, pour tout $\eta \in T$. On a

$$\rho(i(\eta)u) = i(\bar{\eta})\rho u$$

pour tout $\eta \in T$, où $\bar{\eta} = \rho(\eta) \in T_Y$. Donc, si $\eta \in T$ et $\bar{\eta} = \rho(\eta) \in T_Y$, on a

$$i(\eta)u \in \bigwedge^{i-1} T^* \otimes J_m(W\,;\,\rho)$$

si et seulement si

$$i(\bar{\eta})\rho u \in \bigwedge^{i-1} T_Y^* \otimes J_m(V'\,;\,Y)\,.$$

Puisque $\rho(W) = V'$, d'après (11.20) on en déduit que $u \in F_i^i(T\,;\,\tau)$ si et seulement si $\rho u \in F_i^i(T_Y\,;\,\sigma)$. On vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_i^i(T\,;\,\rho)_m \cap F_i^i(T\,;\,\tau)_m \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ F_i^i(T_Y\,;\,\sigma)_m \arrow[r, "\sigma"] & \bigwedge^i T_Z^* \otimes J_m(T_Z\,;\,Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif, et donc que

$$\begin{aligned} (11.27)\qquad F^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_m &= (\textstyle\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_m(\mathscr{T}\,;\,\rho))_\rho \cap (\textstyle\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_m(\mathscr{T}\,;\,\tau))_\tau \\ &= \{u \in (\textstyle\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes J_m(\mathscr{T}\,;\,\rho))_\rho \,|\, \rho u \in (\textstyle\bigwedge^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_m(\mathscr{T}_Y\,;\,Y\,;\,\sigma))_\sigma\} \end{aligned}$$

et que le diagramme

(11.28)
$$\begin{tikzcd} F^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_m \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ (\bigwedge^i \mathscr{T}_Y^* \otimes J_m(\mathscr{T}_Y\,;\,Y\,;\,\sigma))_\sigma \arrow[r, "\sigma"] & \bigwedge^i \mathscr{T}_Z^* \otimes J_m(\mathscr{T}_Z\,;\,Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose

$$\bar{F}^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_m = (\textstyle\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_m(\mathscr{T}\,;\,\rho))_\rho \cap (\textstyle\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{J}_m(\mathscr{T}\,;\,\tau))_\tau\,.$$

Proposition 11.3. *Supposons que X soit connexe. Soient $R_{k+1} \subset J_{k+1}(T\,;\,\rho)$ une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et $N_k \subset J_k(T)$ une équation différentielle formellement intégrable telle que*

$$[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{N}_k] \subset \mathscr{N}_k\,.$$

Soient $R''_{k_1+1} \subset J_{k_1+1}(T_Y\,;\,Y)$ une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et $N''_{k_1} \subset J_{k_1}(T_Y\,;\,Y)$ une équation différentielle formellement intégrable, avec $k_1 \geq k$, telles que

$$[\bar{\mathscr{R}}''_{k_1+l+1}, \mathscr{N}''_{k_1+l}] \subset \mathscr{N}''_{k_1+l}\,,$$
$$\rho(R_{k_1+l+1,a}) = R''_{k_1+l+1,\rho(a)}\,, \qquad \rho(N_{k_1+l,a}) = N''_{k_1+l,\rho(a)}\,,$$

pour tous $a \in X$ *et* $l \geq 0$. *Soient* Z *une variété différentiable et* $\sigma: Y \to Z$ *une submersion surjective et* $R''^{\#}_{k_2+1} \subset J_{k_2+1}(T_Z\,; Z)$ *une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et* $N''^{\#}_{k_2} \subset J_{k_2}(T_Z\,; Z)$ *une équation différentielle formellement intégrable, avec* $k_2 \geq k_1$, *telles que* R''_{k_1+1} *et* N''_{k_1} *soient* σ*-projetables et*

$$[\mathscr{R}''^{\#}_{k_2+l+1}, \mathscr{N}''^{\#}_{k_2+l}] \subset \mathscr{N}''^{\#}_{k_2+l}\,,$$
$$\sigma(R''_{k_2+l+1,b}) = R''^{\#}_{k_2+l+1,\sigma(b)}\,, \qquad \sigma(N''_{k_2+l,b}) = N''^{\#}_{k_2+l,\sigma(b)}\,,$$

pour tous $b \in Y$ *et* $l \geq 0$.

(i) *Si* $\tau = \sigma \circ \rho$, *alors* R_{k+1} *et* N_k *sont* τ*-projetables et*

$$\tau(R_{k_2+l+1,a}) = R''^{\#}_{k_2+l+1,\tau(a)}\,, \tag{11.29}$$

$$\tau(N_{k_2+l,a}) = N''^{\#}_{k_2+l,\tau(a)}\,, \tag{11.30}$$

pour tous $a \in X$ *et* $l \geq 0$, *et le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^*(N_k) \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ H^*(N''_{k_1}) \arrow[r, "\sigma"] & H^*(N''^{\#}_{k_2}) \end{tikzcd} \tag{11.31}$$

dont les applications ρ, σ, τ *sont données par le théorème* 11.2 (ii) *est commutatif.*

(ii) *Soient* X_1 *une variété différentiable,* $\sigma_1: X \to X_1$ *et* $\rho_1: X_1 \to Z$ *des submersions surjectives telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\rho"] & X_1 \arrow[d, "\rho_1"] \\ Y \arrow[r, "\sigma"] & Z \end{tikzcd}$$

soit commutatif et telles que R_{k+1} *et* N_k *soient* σ_1*-projetables. Soient* $R^{\#}_{k_3+1} \subset J_{k_3+1}(T_{X_1}\,; X_1)$ *une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et* $N^{\#}_{k_3} \subset J_{k_3}(T_{X_1}\,; X_1)$ *une équation différentielle formellement intégrable, avec* $k_3 \geq k_2$, *telles que* $R^{\#}_{k_3+1}$ *et* $N^{\#}_{k_3}$ *soient* ρ_1*-projetables et*

$$[\mathscr{R}^{\#}_{k_3+l+1}, \mathscr{N}^{\#}_{k_3+l}] \subset \mathscr{N}^{\#}_{k_3+l}\,,$$
$$\sigma_1(R_{k_3+l+1,a}) = R^{\#}_{k_3+l+1,\sigma_1(a)}\,, \qquad \sigma_1(N_{k_3+l,a}) = N^{\#}_{k_3+l,\sigma_1(a)}\,,$$
$$\rho_1(R^{\#}_{k_3+l+1,c}) = R''^{\#}_{k_3+l+1,\rho_1(c)}\,, \qquad \rho_1(N^{\#}_{k_3+l,c}) = N''^{\#}_{k_3+l,\rho_1(c)}\,,$$

pour tous $a \in X$, $c \in X_1$ *et* $l \geq 0$. *Soient* V_1 *le fibré des vecteurs tangents aux fibres de* ρ_1 *et* $N'_{k_0}, N'^{\#}_{k_0}$ *les équations différentielles formellement intégrables* *dans* $J_{k_0}(T)$ *et* $J_{k_0}(T_{X_1}; X_1)$, *avec* $k_0 \geq k_3$, *données par la proposition* 10.3 (ii) *à partir de* N_k *et de* V *et à partir de* $N_{k_3}^\#$ *et de* V_1 *respectivement telles que* $N'_\infty = N_\infty \cap J_\infty(V)$ *et* $N'^\#_\infty = N^\#_\infty \cap J_\infty(V_1)$. *Alors* $\sigma_1(N'_{\infty,a}) \subset N'^\#_{\infty,\sigma_1(a)}$ *pour* $a \in X$. *Si* $\sigma_1(N'_{\infty,a}) = N'^\#_{\infty,\sigma_1(a)}$ *pour tout* $a \in X$, *alors* N'_{k_0} *est* σ_1*-projetable et*

$$\sigma_1(N'_{k_0+l,a}) = N'^\#_{k_0+l,\sigma_1(a)} \tag{11.32}$$

pour tous $a \in X$ *et* $l \geq 0$, *et on a un diagramme commutatif et exact*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^j(N'_{k_0}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\sigma_1"] & H^j(N_k) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma_1"] & H^j(N''_{k_1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\sigma"] & H^{j+1}(N'_{k_0}) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^j(N'^\#_{k_0}) \arrow[r, "\iota"] & H^j(N^\#_{k_3}) \arrow[r, "\rho_1"] & H^j(N''^\#_{k_2}) \arrow[r, "\partial"] & H^{j+1}(N'^\#_{k_0}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{11.33}$$

dont les lignes nous sont données par le théorème 11.2 (ii). *Si, de plus,* N_k *est une équation de Lie, toutes les autres équations différentielles sont des équations de Lie, et, si*

$$\mu: H^*(N_k) \to \operatorname{Der} H^*(N'_{k_0}) , \qquad \mu^\#: H^*(N^\#_{k_3}) \to \operatorname{Der} H^*(N'^\#_{k_0})$$

sont les homomorphismes d'algèbres de Lie graduées (11.14), *alors*

$$\sigma_1(\mu(\alpha)\cdot\beta) = \mu^\#(\sigma_1(\alpha))\cdot\sigma_1(\beta) \tag{11.34}$$

pour tous $\alpha \in H^*(N_k)$, $\beta \in H^*(N'_{k_0})$.

Démonstration. (i) D'après (11.20), R_{k+1} et N_k sont τ-projetables, et on a donc (11.29) et (11.30). D'après le théorème 3 de [20], il existe un entier $m_0 \geq k_2$ tel que les applications

$$H^*_\rho(N_k)_m \to H^*(N_k)_m , \qquad H^*_\tau(N_k)_m \to H^*(N_k)_m ,$$
$$H^*_\sigma(N''_{k_1})_m \to H^*(N''_{k_1})_m \tag{11.35}$$

soient des isomorphismes pour tout $m \geq m_0$. Si $u \in \bigwedge^j J_0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}_m$, avec $m \geq m_0$, vérifie $\bar{D}u = 0$, montrons qu'il existe $u_1 \in (\bigwedge^j J_0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}_m) \cap \bar{F}^j_{\rho,\tau}(\mathcal{T})$ et $v \in \bigwedge^{j-1} J_0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}_{m+1}$ tels que

$$u = u_1 + \bar{D}v . \tag{11.36}$$

On peut supposer, d'après notre hypothèse sur m, sans perte de généralité, que $u \in (\bigwedge^j J_0(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}_m)_\rho$. Alors $\rho u \in \bigwedge^j J_0(\mathcal{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}''_m$ et vérifie $\bar{D}\rho u = 0$ d'après la proposition 4 (ii) de [20]. Puisque (11.35) est un isomorphisme, il existe $u' \in (\bigwedge^j J_0(\mathcal{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}''_m)_\sigma$ et $u'' \in \bigwedge^{j-1} J_0(\mathcal{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathcal{N}}''_{m+1}$ tels que

$$\rho u = u' + \bar{D}u'' .$$

Soient $v' \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m)_\rho$ et $v \in (\bigwedge^{j-1} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m+1})_\rho$ vérifiant $\rho v' = u'$ et $\rho v = u''$. Alors

$$\rho(u - v' - \bar{D}v) = 0 ,$$

de sorte que, si $\bar{N}_m = N_m \cap J_m(V)$, alors $v_1 = u - v' - \bar{D}v$ appartient à $\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}_m$ et $u_1 = v' + v_1$ à $(\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m)_\rho$. On a donc la relation (11.36), où u_1 vérifie $\rho u_1 = u'$. Comme $u' \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}''_m)_\sigma$, on voit d'après (11.27) que $u_1 \in \bar{F}^j_{\rho,\tau}(\mathscr{T})$. Maintenant tout élément $\alpha \in H^j(N_k)_m$, avec $m \geq m_0$, possède donc un représentant $u \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_m) \cap \bar{F}^j_{\rho,\tau}(\mathscr{T})$ vérifiant $\bar{D}u = 0$. Alors ρu est un représentant de la classe $\rho\alpha \in H^j(N''_k)_m$ et τu un représentant de $\tau\alpha \in H^j(N''^{\#}_{k_2})_m$, tandis que $\sigma(\rho u)$ est un représentant de $\sigma(\rho\alpha) \in H^j(N''^{\#}_{k_2})_m$. Puisque $\sigma(\rho u) = \tau u$ d'après la commutativité de (11.28), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^*(N_k)_m \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
H^*(N''_{k_1})_m \arrow[r, "\sigma"] & H^*(N''^{\#}_{k_2})_m
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour $m \geq m_0$, d'où la commutativité de (11.31).

(ii) Soient $\bar{N}_m = N_m \cap J_m(V)$ et $\bar{N}^{\#}_m = N^{\#}_m \cap J_m(V_1)$ pour $m \geq k_0$. Alors $\sigma_1(\bar{N}_{m,a}) \subset \bar{N}^{\#}_{m,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X$, de sorte que $\sigma_1(N'_{\infty,a}) \subset N'^{\#}_{\infty,\sigma_1(a)}$. Soit $l_0 \geq 1$ un entier tel que

$$N'_m = \pi_m \bar{N}_{m+l_0} , \qquad N'^{\#}_m = \pi_m \bar{N}^{\#}_{m+l_0}$$

pour tout $m \geq k_0$. Si $\sigma_1(N'_{\infty,a}) = N'^{\#}_{\infty,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X$, il est clair que N'_{k_0} est σ-projetable et que l'on a (11.32).

Démontrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme 11.2. *Si $\sigma_1(N'_{\infty,a}) = N'^{\#}_{\infty,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X$ et $u \in F^{i+j}_{i+j}(\mathscr{N}_{m+l_0}; \tau) \cap F^{i+j}_i(\mathscr{N}_{m+l_0}; \sigma_1)$ avec $m \geq k_0$, il existe $u' \in F^{i+j}_i(\mathscr{N}'_m; \sigma_1)$ tel que*

$$\pi_m u - u' \in F^{i+j}_{i+j}(\mathscr{N}_m; \tau) \cap F^{i+j}_{i+1}(\mathscr{N}_m; \sigma_1) ;$$

si $Du = 0$, il existe $v \in F^{i+j-1}_i(\mathscr{N}'_{m+1}; \sigma_1)$ tel que

$$\pi_m u - Dv \in F^{i+j}_{i+j}(\mathscr{N}_m; \tau) \cap F^{i+j}_{i+1}(\mathscr{N}_m; \sigma_1) .$$

Lemme 11.3. *Si $\sigma_1(N'_{m,a}) = N'^{\#}_{m,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X$ et $u \in (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{N}_{m+l_0})_\tau \cap F^i_i(\mathscr{N}_{m+l_0}; \sigma_1)$ avec $m \geq k_0$, il existe $u' \in \mathscr{F}^i_i(\sigma_1) \otimes \mathscr{N}'_m$ tel que*

$$\pi_m u - u' \in (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{N}_m)_\tau \cap (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{N}_m)_{\sigma_1} .$$

Lemme 11.4. *Si $\sigma_1(N'_{\infty,a}) = N'^{\#}_{\infty,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X$ et $u \in (\bigwedge^i \mathscr{T}^* \otimes$*

$\mathcal{N}''_{m+(j+1)l_0})_{\sigma,\rho(x)}$, *avec* $m \geq k_0$ *et* $x \in X$, *il existe* $v \in ((\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_m)_{\sigma_1} \cap F^i_{\rho,\tau}(\mathcal{T})_m)_x$ *tel que* $\rho v = \pi_m u$.

Démonstration du lemme 11.2. Il suffit de considérer le cas où j est positif. Soit V'_1 le fibré des vecteurs tangents aux fibres de σ_1; alors $V'_1 \subset W$. Puisque $u \in F^{i+j}_{i+j}(\mathcal{N}_{m+l_0}; \tau)$, on a $\tau(i(\xi)u) = 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{V}'_1$; donc

$$(\mathrm{id} \otimes \sigma_1)(i(\xi)u) \in \bigwedge^{i+j-1} \mathcal{T}^* \otimes (\bar{\mathcal{N}}^{\#}_{m+l_0})_X$$

pour tout $\xi \in \mathcal{V}'_1$. Il en résulte que

$$\sigma_1 u \in \bigwedge^j \mathcal{V}'^*_1 \otimes (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \bar{\mathcal{N}}^{\#}_{m+l_0})_X, \qquad \sigma_1 \pi_m u \in \bigwedge^j \mathcal{V}'^*_1 \otimes (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \mathcal{N}'^{\#}_m)_X.$$

Or il existe $u' \in F^{i+j}_i(\mathcal{N}'_m; \sigma_1)$ tel que $\sigma_1 u' = \sigma_1 \pi_m u$. Alors $\pi_m u - u' \in F^{i+j}_i(\mathcal{N}_m; \sigma_1)$ et $\sigma_1(\pi_m u - u') = 0$, de sorte que $\pi_m u - u' \in F^{i+j}_{i+1}(\mathcal{N}_m; \sigma_1)$. Comme $\tau(N'_m) = 0$, on a $\pi_m u - u' \in F^{i+j}_{i+j}(\mathcal{N}_m; \tau)$. Si $Du = 0$, alors d'après la proposition 3 de [20], $\pi_{m+l_0-1} d_{X/X_1} \sigma_1 u = 0$, et puisque $l_0 \geq 1$, on a $d_{X/X_1} \sigma_1 \pi_m u = 0$. Il existe donc $v_1 \in \bigwedge^{j-1} \mathcal{V}'^*_1 \otimes (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \mathcal{N}'^{\#}_{m+1})_X$ et $v \in F^{i+j-1}_i(\mathcal{N}'_{m+1}; \sigma_1)$ tels que $d_{X/X_1} \pi_m v_1 = \sigma_1 \pi_m u$ et $\sigma_1 v = v_1$ (cf. [20, § 4]). Alors $\sigma_1 Dv = \sigma_1 \pi_m u$ et on peut dans ce cas prendre $u' = Dv$.

Démonstration du lemme 11.3. Puisque $u \in F^i_i(\mathcal{N}_{m+l_0}; \sigma_1) \cap F^i_i(\mathcal{N}_{m+l_0}; \tau)$, d'après (11.27) on a $\sigma_1 u \in F^i_i(\mathcal{N}^{\#}_{m+l_0}; \rho_1)_X$. D'autre part $\tau u \in \bigwedge^i \mathcal{T}^*_Z \otimes \mathcal{N}''^{\#}_{m+l_0}$, et il existe donc $v \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \mathcal{N}^{\#}_{m+l_0})_{\rho_1}$ tel que $\rho_1 v = \tau u$. En considérant v comme élément de $F^i_i(\mathcal{N}^{\#}_{m+l_0}; \rho_1)_X$ à l'aide de $\sigma_1 \colon X \to X_1$ et l'application $\rho_1 \colon F^i_i(\mathcal{N}^{\#}_{m+l_0}; \rho_1)_X \to (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_Z \otimes \mathcal{N}''^{\#}_{m+l_0})_X$, alors $\rho_1(\sigma_1 u - v) = \tau u - \rho_1 v = 0$. Donc $\sigma_1 u - v \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \bar{\mathcal{N}}^{\#}_{m+l_0})_X$, de sorte que $\sigma_1 \pi_m u - \pi_m v = \pi_m(\sigma_1 u - v) \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \mathcal{N}'^{\#}_m)_X$. Alors il existe $u' \in \mathcal{F}^i_i(\sigma_1) \otimes \mathcal{N}'_m$ tel que $\sigma_1 u' = \sigma_1 \pi_m u - \pi_m v$. De plus, $\sigma_1(\pi_m u - u') = \pi_m v \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^*_{X_1} \otimes \mathcal{N}^{\#}_m)_{\rho_1}$ et $\pi_m u - u' \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_m)_{\sigma_1}$. Comme $\tau(N'_m) = 0$, on a $\pi_m u - u' \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_m)_\tau$.

Démonstration du lemme 11.4. Il existe $u_1 \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_{m+(j+1)l_0})_{\rho,x}$ tel que $\rho u_1 = u$; d'après (11.27), $u_1 \in F^i_{\rho,\tau}(\mathcal{T})_{m+(j+1)l_0}$. Par applications successives du lemme 11.2, il existe $u_2 \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}'_{m+l_0})_x$ tel que

$$\pi_{m+l_0} u_1 - u_2 \in F^i_i(\mathcal{N}_{m+l_0}; \sigma_1)_x .$$

Comme $\pi_{m+l_0} u_1 \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_{m+l_0})_\tau$ et $\tau(N'_{m+l_0}) = 0$, on a

$$\pi_{m+l_0} u_1 - u_2 \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_{m+l_0})_\tau .$$

Le lemme 11.3 nous donne maintenant $u_3 \in F^i_i(\mathcal{N}'_m; \sigma_1)_x$ tel que

$$v = \pi_m u_1 - \pi_m u_2 - u_3 \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_m)_{\sigma_1, x} .$$

Puisque $\rho(N'_m) = 0$, on a $v \in (\bigwedge^i \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}_m) \cap F^i_{\rho,\tau}(\mathcal{T})_m$ et $\rho v = \rho \pi_m u_1 = \pi_m u$.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 11.3 (ii). A cause de (i) et de la commutativité du diagramme (11.31), pour démontrer que (11.33) est commutatif, il suffit de montrer que le diagramme

$$
\begin{array}{ccc}
H^j(N^{\#}_{k_1})_{\rho(x)} & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(N'_{k_0})_x \\
\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma_1} \\
H^j(N''^{\#}_{k_3})_{\tau(x)} & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(N'^{\#}_{k_0})_{\sigma_1(x)}
\end{array}
\tag{11.37}
$$

est commutatif pour tout $x \in X$. Supposons que l'on ait (11.32) pour tout $a \in X$ et $l \geq 0$. Soit $m_1 \geq k_0$ un entier tel que

$$
H^*(N'_{k_0}) \simeq H^*(N'_{k_0})_m \simeq H^*_{\sigma_1}(N'_{k_0})_m\ , \qquad H^*(N'^{\#}_{k_0}) \simeq H^*(N'^{\#}_{k_0})_m \simeq H^*_{\rho_1}(N'^{\#}_{k_0})_m\ ,
$$
$$
H^*(N''_{k_1}) \simeq H^*(N''_{k_1})_m \simeq H^*_{\sigma}(N''_{k_1})_m\ , \qquad H^*(N''^{\#}_{k_3}) \simeq H^*(N''^{\#}_{k_3})_m
$$

pour tout $m \geq m_1$. Soient $x \in X$ avec $\rho(x) = y$ et $\alpha \in H^j(N''_{k_1})_y$. Il existe un représentant $u \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T}_Y)^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}''_{m+(j+2)l_0+1})_{\sigma,y}$ de α, avec $m \geq m_1$, vérifiant $\bar{D}u = 0$. D'après le lemme 11.4, il existe $v \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m+l_0+1})_{\sigma_1,x} \cap \bar{F}^j_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_{m+l_0+1,x}$ tel que $\rho v = \pi_{m+l_0+1}u$. Alors $\bar{D}v \in (\bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}_{m+l_0}) \cap \bar{F}^{j+1}_{\sigma_1,\tau}(\mathscr{T})_{m+l_0}$ et $\pi_m\bar{D}v \in (\bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}'_m)_{\sigma_1,x}$ est un représentant de $\partial\alpha \in H^{j+1}(N'_{k_0})_x$. De plus, $\sigma_1\pi_m\bar{D}v \in (\bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}'^{\#}_m)_{\sigma_1(x)}$ est un représentant de $\sigma_1\partial\alpha \in H^{j+1}(N'^{\#}_{k_0})_{\sigma_1(x)}$ et $\rho_1\sigma_1 v = \sigma\pi_{m+l_0+1}u \in \bigwedge^j J_0(\mathscr{T}_Z)^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}''^{\#}_{m+l_0+1}$ est un représentant de $\sigma\alpha \in H^j(N''^{\#}_{k_2})_{\sigma(y)}$. Il en résulte que $\bar{D}\sigma_1 v \in \bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}^{\#}_{m+l_0}$ et que $\pi_m\bar{D}\sigma_1 v = \sigma_1\pi_m\bar{D}v \in (\bigwedge^{j+1} J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}'^{\#}_m)_{\sigma_1(x)}$ est un représentant de $\partial\sigma\alpha$, d'où l'égalité $\partial\sigma\alpha = \sigma_1\partial\alpha$ et la commutativité de (11.37). Si N_k est une équation de Lie, montrons maintenant que l'on a (11.34). Soit $m_2 \geq m_1$ un entier tel que

$$
H^*(N_k) \simeq H^*(N_k)_m \simeq H^*_\rho(N_k)_m \simeq H^*_{\sigma_1}(N_k)_m\ ,
$$
$$
H^*(N^{\#}_{k_3}) \simeq H^*(N^{\#}_{k_3})_m \simeq H^*_{\rho_1}(N^{\#}_{k_3})_m
$$

pour tout $m \geq m_2$. Soient m un entier $\geq m_2$ et $\alpha \in H^i(N_k)$, $\beta \in H^j(N'_{k_0})$. D'après la démonstration de (i), il existe un représentant $u_1 \in (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m+(i+1)l_0+1}) \cap \bar{F}^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_{m+(i+1)l_0+1}$ de α vérifiant $\bar{D}u_1 = 0$. Comme $\rho(N'_\infty) = 0$, par applications successives du lemme 11.2, on obtient à partir de u_1 un représentant $u_2 \in \bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m+l_0+1}$ de α tel que

$$
(\nu^* \otimes \nu)u_2 \in F^i_i(\mathscr{N}_{m+l_0+1}\,;\, \sigma_1) \cap F^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_{m+l_0+1}\ .
$$

Puisque $\bar{D}u_2 = 0$, la proposition 4 (i) de [20] nous dit que le représentant $u = \pi_{m+l_0}u_2$ appartient à $(\bigwedge^i J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}_{m+l_0})_{\sigma_1} \cap \bar{F}^i_{\rho,\tau}(\mathscr{T})_{m+l_0}$. D'après notre hypothèse sur m, il existe un représentant $v \in (\bigwedge^j J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}'_{m+l_0})_{\sigma_1}$ de β; alors $[u, v] \in (\bigwedge^{i+j} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \bar{\tilde{\mathscr{N}}}_{m+l_0})_{\sigma_1}$ et $\pi_m[u, v] \in (\bigwedge^{i+j} J_0(\mathscr{T})^* \otimes \tilde{\mathscr{N}}'_m)_{\sigma_1}$ est un représentant de $\mu(\alpha)\cdot\beta$. Alors $\sigma_1\pi_m[u, v]$ est un représentant de

$\sigma_1(\mu(\alpha)\cdot\beta) \in H^{i+j}(N'^{\#}_{k_0})$. D'autre part, $\sigma_1 u \in (\bigwedge^i J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \mathscr{N}^{\#}_{m+l_0})_{\rho_1}$ d'après (11.27) est un représentant de $\sigma_1\alpha \in H^j(N^{\#}_{k_0})$ et $\sigma_1 v \in \bigwedge^j J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \mathscr{N}'^{\#}_{m+l_0}$ de $\sigma_1\beta \in H^j(N'^{\#}_{k_0})$, de sorte que $\sigma_1\pi_m[u, v] = \pi_m[\sigma_1 u, \sigma_1 v] \in \bigwedge^{i+j} J_0(\mathscr{T}_{X_1})^* \otimes \mathscr{N}'^{\#}_m$ est un représentant de $\mu(\sigma_1(\alpha))\cdot\sigma_1(\beta)$, ce qui démontre (11.34).

12. Prolongement et équivalence locale d'équations de Lie

Soit $g_k(T; \rho) \subset S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ le sous-fibré noyau de $\pi_{k-1}: J_k(T; \rho) \to J_{k-1}(T; \rho)$. Si $\rho^*: T^*_{Y,\rho(x)} \to T^*_x$, pour $x \in X$, est l'inclusion induite par ρ, alors

$$\begin{aligned} g_k(T; \rho) &= S^k J_0(T)^* \otimes J_0(V) + (\rho^* S^k T^*_Y) \otimes J_0(T) \\ &= \left\{ u \in S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T) \,\middle|\, \begin{array}{l} \xi \mathbin{\overline{\wedge}} \bar{\delta} u \in S^{k-1} J_0(T)^* \otimes J_0(V) \\ \text{pour tout } \xi \in J_0(V) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $Q_k(\rho)$ le fibré des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$ ρ-projetables (i.e., qui induisent des applications $Y \to Y$); c'est une forme finie de $J_k(T; \rho)$. Si

$$Q^k_{k+1}(\rho) = \{\phi \in Q_{k+1}(\rho) \mid \pi_k\phi = I_k(x), \text{ si } x = \text{source } \phi\},$$

alors on vérifie que

$$\partial Q^k_{k+1}(\rho) = g_{k+1}(T; \rho)$$

et par conséquent que

$$Q_{k+1}(\rho)(a, b) = \{\phi \in Q_{k+1}(a, b) \mid \phi(J_k(V)_a) = J_k(V)_b\}$$

pour tous $a, b \in X$. Les automorphismes de X solutions de $Q_k(\rho)$ considéré comme équation différentielle sont les automorphismes de X ρ-projetables. On note $\rho: Q_k(\rho) \to Q_k(Y)$ la projection naturelle de $Q_k(\rho)$ sur le fibré $Q_k(Y)$ des jets d'ordre k inversibles d'applications $Y \to Y$. Le fibré $Q_k(V)$ des jets de $Q_k(\rho)$, dont l'image par ρ dans $Q_k(Y)$ est égale au jet d'ordre k de l'identité $Y \to Y$, est une forme finie de $J_k(V)$.

D'après le corollaire 3 de [20] et les méthodes du § 5 de [20], on peut démontrer le

Lemme 12.1. *On a $g_k(T; \rho)_{+1} = g_{k+1}(T; \rho)$ pour $k \geq 1$, et $H^{m,j}(g_1(T; \rho)) = 0$ pour $m \geq 1$ et $j \geq 0$.*

Soient $x \in X$ et $y = \rho(x) \in Y$. La proposition suivante est une conséquence des résultats de Rim [13] et du lemme 12.1.

Proposition 12.1. *Soient L une algèbre de Lie transitive, L^0 une sous-algèbre fondamentale de L et $\pi_0: L \to L/L^0$ la projection naturelle. Soient $i_1: L \to J_1(T; \rho)_x$ une application et $i_0: L/L^0 \to J_0(T)_x$ un isomorphisme tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_1} & J_1(T\,;\,\rho)_x \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ L/L^0 & \xrightarrow{i_0} & J_0(T)_x \end{array}$$

soit commutatif et

$$[i_1(\xi), i_1(\eta)] = i_0\pi_0[\xi, \eta]$$

pour tous $\xi, \eta \in L$. *Alors il existe un monomorphisme* $i\colon L \to J_\infty(T\,;\,\rho)_x$ *d'algèbres de Lie transitives tel que* $\pi_1 \circ i = i_1$. *De plus, si* i' *est une autre application vérifiant ces conditions et si* $\pi_k \circ i' = \pi_k \circ i$, *il existe* $\phi \in Q_\infty(\rho)(x, x)$ *tel que* $\phi \circ i = i'$ *et* $\pi_{k+1}\phi = I_{k+1}(x)$.

Le résultat suivant est une version relative du théorème III de Guillemin-Sternberg [7] et sa démonstration est une généralisation facile de celle de ce dernier grâce au lemme 12.1 (cf. Rim [13]).

Théorème 12.1. *Soient* $L' \subset J_\infty(T_Y\,;\,Y)_y$ *une sous-algèbre de Lie transitive fermée,* L *une algèbre de Lie transitive et* $\phi\colon L \to L'$ *un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives. Soit* L^0 *une sous-algèbre fondamentale de* L *telle que* $\phi(L^0) \subset L' \cap J^0_\infty(T_Y\,;\,Y)_y$. *Pour tout isomorphisme* $\alpha\colon L/L^0 \to J_0(T)_x$ *tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} L/L^0 & \xrightarrow{\alpha} & J_0(T)_x \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ L'/L'^0 & \longrightarrow & J_0(T_Y\,;\,Y)_y \end{array}$$

soit commutatif, où $L'^0 = L' \cap J^0_\infty(T_Y\,;\,Y)_y$, *il existe un monomorphisme d'algèbres de Lie transitives*

$$i\colon L \to J_\infty(T\,;\,\rho)_x$$

tel que:

(i) $i(L^0) = i(L) \cap J^0_\infty(T\,;\,\rho)_x$;

(ii) *l'application induite par* i

$$L/L^0 \to J_0(T)_x$$

soit égale à α;

(iii) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & J_\infty(T\,;\,\rho)_x \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ L' & \longrightarrow & J_\infty(T_Y\,;\,Y)_y \end{array}$$

soit commutatif.

Si $i' : L \to J_\infty(T\,;\,\rho)_x$ est un autre monomorphisme vérifiant ces conditions, alors il existe $\phi \in Q_\infty(V)(x, x)$ tel que $\phi \circ i = i'$.

Supposons que Y soit munie d'une structure de variété analytique réelle.

Théorème 12.2. *Soient $R''_{k''} \subset J_{k''}(T_Y\,;\,Y)$ une équation de Lie analytique formellement transitive et formellement intégrable dont on note $R''_{k''+l}$ le l-ième prolongement, et L une algèbre de Lie transitive et L^0 une sous-algèbre fondamentale de L. Soient $y \in Y$ et $\phi : L \to R''_{\infty,y}$ un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives tel que $\phi(L^0) \subset R''^{0}_{\infty,y}$.*

(i) *Alors il existe une variété analytique X, une submersion analytique $\rho : X \to Y$, un point $x \in X$ tel que $\rho(x) = y$, un monomorphisme $i : L \to J_\infty(T\,;\,\rho)_x$ d'algèbres de Lie transitives, tels que $i(L)$ soit une sous-algèbre transitive de $J_\infty(T)_x$ vérifiant les conditions* (i) *et* (iii) *du théorème* 12.1, *où $L' = R''_{\infty,y}$.*

(ii) *Quelque soit l'entier $m \geq 0$, il existe sur un voisinage U de x une équation de Lie analytique $R_k \subset J_k(T\,;\,\rho)$ formellement transitive et formellement intégrable ρ-projetable et $\psi \in Q_\infty(\rho)(x, x)$ tels que*

$$\rho(R_{k+l,a}) = R''_{k+l,\rho(a)}$$

pour tous $l \geq 0$ et $a \in U$, et, si $\bar{\psi} = \rho(\psi)$,

$$\psi \cdot i : L \to R_{\infty,x}\,, \qquad \bar{\psi} : R''_{\infty,y} \to R''_{\infty,y}$$

soient des isomorphismes d'algèbres de Lie transitives et $\pi_{m+1}\psi = I_{m+1}(x)$, et tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\psi \circ i} & R_{\infty,x} \\ \big\downarrow{\scriptstyle\phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\bar{\psi}} & R''_{\infty,y} \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. (i) Soient X une variété analytique et $\rho : X \to Y$ une submersion et $x \in X$ vérifiant $\rho(x) = y$ tels que $J_0(T)_x$ soit isomorphe à L/L^0. Le monomorphisme $i : L \to J_\infty(T\,;\,\rho)_x$ existe d'après le théorème 12.1.

(ii) Soit $\bar{R}_{k''+l} \subset J_{k''+l}(T\,;\,\rho)$ l'image inverse de $R''_{k''+l}$ par ρ, pour $l \geq 0$. Comme $\bar{\mathscr{R}}_{k''+l}$ est engendré par $(\bar{\mathscr{R}}_{k''+l})_\rho$, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_{k''+l}(\mathscr{V}) \longrightarrow (\bar{\mathscr{R}}_{k''+l})_\rho \xrightarrow{\rho} \mathscr{R}''_{k''+l} \longrightarrow 0$$

et de (11.5), on déduit que $\bar{R}_{k''+l}$ est une équation de Lie analytique formellement transitive. Il existe un entier $k_1 \geq k''$ tel que $\bar{R}_{k_1}$ soit formellement intégrable et $\bar{R}_{k_1+l} = (\bar{R}_{k_1})_{+l}$, pour $l \geq 0$ (cf. [20, proposition 5 (ii)]). D'après nos hypothèses sur ϕ et sur i, on a $i(L) \subset \bar{R}_{\infty,x} = \varprojlim \bar{R}_{k''+l,x}$. La version relative du troisième théorème fondamental (corollaire 6.2) nous donne l'existence sur un voisinage connexe U de x d'une équation de Lie analytique $R_k \subset \bar{R}_k$ formellement transitive et formellement intégrable, avec $k \geq k_1$, et de $\psi' \in Q_\infty(x, x)$ tels que $\pi_{m+2}\psi' = I_{m+2}(x)$ et $\psi' i(L) = R_{\infty,x}$ (cf. théorème 4.1). D'après la proposition 12.1, il existe $\psi \in Q_\infty(\rho)(x, x)$ tel que $\psi \circ i = \psi' \circ i$ et $\pi_{m+1}\psi = I_{m+1}(x)$, de sorte que $\psi \circ i \colon L \to R_{\infty,x}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie vérifiant $\psi i(L^0) = R^0_{\infty,x}$. Si $\bar{\psi} = \rho(\psi) \in Q_\infty(Y)(y, y)$, on a

$$\bar{\psi}R''_{\infty,y} = \bar{\psi}\phi(L) = \bar{\psi}\rho i(L) = \rho\psi i(L) = \rho(R_{\infty,x}) \subset R''_{\infty,y} \tag{12.1}$$

d'après la construction de R_k. Donc $\bar{\psi}$ est un automorphisme de $R''_{k''+l,y}$ et par conséquent aussi de $R''_{\infty,y}$. D'après (12.1), on obtient

$$\rho R_{\infty,x} = R''_{\infty,y} \ ,$$

$$\rho(R_{k+l,x}) = R''_{k+l,y} \tag{12.2}$$

pour tout $l \geq 0$. Comme R_{k+l+1} est formellement transitif et U connexe, pour tout $a \in U$, il existe $\psi_1 \in Q_{k+l+1}(\rho)(x, a)$ appartenant à une forme finie de R_{k+l+1} tel que $\psi_1(R_{k+l,x}) = R_{k+l,a}$ et tel que, si $\bar{\psi}_1 = \rho(\psi_1) \in Q_{k+l+1}(Y)(y, \rho(a))$, l'on ait d'après (12.2)

$$\bar{\psi}_1 R''_{k+l,y} = \bar{\psi}_1 \rho R_{k+l,x} = \rho\psi_1 R_{k+l,x} = \rho R_{k+l,a} \subset R''_{k+l,\rho(a)} \ .$$

Donc $\bar{\psi}_1 \colon R''_{k+l,y} \to R''_{k+l,\rho(a)}$ est un isomorphisme et $\rho(R_{k+l,a}) = R''_{k+l,\rho(a)}$.

En prenant $L = R''_{\infty,y}$ dans le théorème précédent, l'équation de Lie R_k qu'on obtient est un prolongement de $R''_{k''}$ et on a le résultat suivant qui nous montre que toute sous-algèbre ouverte $L^0 \subset R''^0_{\infty,y}$ correspond à la sous-algèbre fondamentale $R^0_{\infty,x}$ d'un prolongement R_k de $R''_{k''}$:

Corollaire 12.1. *Soit $R''_{k''} \subset J_{k''}(T_Y; Y)$ une équation de Lie analytique formellement transitive et formellement intégrable. Si L^0 est une sous-algèbre ouverte de $R''^0_{\infty,y}$, alors il existe une variété analytique X, une submersion analytique $\rho \colon X \to Y$, une équation de Lie analytique $R_k \subset J_k(T; \rho)$ formellement transitive et formellement intégrable, avec $k \geq k''$, qui est ρ-projetable et un prolongement de $R''_{k''}$, et $x \in X$ avec $\rho(x) = y$ et $\bar{\psi} \in Q_\infty(Y)(y, y)$ tels que $\bar{\psi}(L^0) = \rho(R^0_{\infty,x})$.*

Soit Z une variété différentiable dont on note T_Z le fibré tangent. Soient $R''_p \subset J_p(T_Y; Y)$, $R''^{\#}_q \subset J_q(T_Z; Z)$ deux équations de Lie formellement transitives et formellement intégrables. Soient A un ensemble fini et $N^{\alpha''}_{p_\alpha} \subset J_{p_\alpha}(T_Y; Y)$, $N^{\alpha''\#}_{q_\alpha} \subset J_{q_\alpha}(T_Z; Z)$, $\alpha \in A$, des équations de Lie appartenant à $\mathscr{F}(R''_p)$ et $\mathscr{F}(R''^{\#}_q)$ respectivement.

Soient $y \in Y$, $z \in Z$. Supposons que Y et Z soient munies de structures de variétés analytiques.

Théorème 12.3. *Supposons que* R''_p *et* $R''^{\#}_q$ *soient des équations de Lie analytiques. Soient* $\phi'' : R''_{\infty,y} \to R''^{\#}_{\infty,z}$ *un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives tel que* $\phi''(N^{\alpha''}_{\infty,y}) = N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ *pour tout* $\alpha \in A$, *et* k_0 *un entier* ≥ 1.

(i) *Il existe une variété analytique* X, *un point* $x \in X$, *des submersions analytiques* $\rho : X \to Y$, $\rho^{\#} : X \to Z$ *vérifiant* $\rho(x) = y$, $\rho^{\#}(x) = z$, *une équation de Lie analytique* $R_k \subset J_k(T;\rho) \cap J_k(T;\rho^{\#})$ *formellement transitive et formellement intégrable et des équations de Lie* $N^{\alpha}_k \subset R_k$ $(\alpha \in A)$ *formellement intégrables tels que*

$$[\bar{\mathscr{R}}_{k+1}, \mathscr{N}^{\alpha}_k] \subset \mathscr{N}^{\alpha}_k \tag{12.3}$$

pour tout $\alpha \in A$, *et tels que* R_k *soit un prolongement de* R''_p *et* N^{α}_k *un prolongement de* $N^{\alpha''}_{p_\alpha}$ *et*

$$\rho^{\#}(R_{k+l,a}) = R''^{\#}_{k+l,\rho^{\#}(a)} , \tag{12.4}$$

$$\rho^{\#}(N^{\alpha}_{k+l,a}) = N^{\alpha''\#}_{k+l,\rho^{\#}(a)} \tag{12.5}$$

pour tous $l \geq 0$, $\alpha \in A$ *et* $a \in X$. *De plus, il existe* $\bar{\Psi} \in Q_\infty(Y)(y,y)$ *et* $\bar{\Psi}_1 \in Q_\infty(Z)(z,z)$ *tels que* $\pi_{k_0+1}\bar{\Psi} = I_{k_0+1}(y)$ *et* $\pi_{k_0+1}\bar{\Psi}_1 = I_{k_0+1}(z)$, *et*

$$\bar{\Psi}(R''_{\infty,y}) = R''_{\infty,y} , \qquad \bar{\Psi}_1(R''^{\#}_{\infty,z}) = R''^{\#}_{\infty,z} ,$$
$$\bar{\Psi}(N^{\alpha''}_{\infty,y}) = N^{\alpha''}_{\infty,y} , \qquad \bar{\Psi}_1(N^{\alpha''\#}_{\infty,z}) = N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$$

pour tous $\alpha \in A$, *et tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\phi''} & R''^{\#}_{\infty,z} \\ \downarrow{\bar{\Psi}} & & \downarrow{\bar{\Psi}_1} \\ R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} & R''^{\#}_{\infty,z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N^{\alpha''}_{\infty,y} & \xrightarrow{\phi''} & N^{\alpha''\#}_{\infty,z} \\ \downarrow{\bar{\Psi}} & & \downarrow{\bar{\Psi}_1} \\ N^{\alpha''}_{\infty,y} & \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} & N^{\alpha''\#}_{\infty,z} \end{array}$$

soient commutatifs, où ρ^{-1} *est l'inverse de* $\rho : R_{\infty,x} \to R''_{\infty,y}$.

(ii) *Les applications* $\rho, \rho^{\#}$ *induisent des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées*

$$\rho^{\#}\cdot\rho^{-1} : H^*(R''_p)_y \to H^*(R''^{\#}_q)_z , \tag{12.6}$$

$$\rho^{\#}\cdot\rho^{-1} : H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y \to H^*(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z \tag{12.7}$$

tels que le diagramme d'algèbres de Lie graduées

$$\begin{array}{ccc} H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y & \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} & H^*(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z \\ \downarrow{\iota} & & \downarrow{\iota} \\ H^*(R''_p)_y & \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} & H^*(R''^{\#}_q)_z \end{array} \tag{12.8}$$

dont les homomorphismes ι sont induits par des inclusions d'équations différentielles, soit commutatif.

(iii) *Si $\alpha, \beta \in A$ et $N^{\beta\prime\prime}_{\infty,y}$ est le noyau de $\phi'': N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y} \to N^{\alpha\prime\prime\#}_{\infty,z}$, alors $N^{\beta}_{\infty,x}$ est le noyau de l'épimorphisme $\rho^{\#}: N^{\alpha}_{\infty,x} \to N^{\alpha\prime\prime\#}_{\infty,z}$ et on a une suite exacte*

$$\begin{aligned}(12.9)\qquad \cdots \longrightarrow H^j(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y \xrightarrow{\iota} H^j(N^{\alpha\prime\prime}_{p_\alpha})_y \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} H^j(N^{\alpha\prime\prime\#}_{q_\alpha})_z \\ \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y \longrightarrow \cdots,\end{aligned}$$

dont l'application $\iota: H^*(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y \to H^*(N^{\alpha\prime\prime}_{p_\alpha})_y$ est l'homomorphisme d'algèbres de Lie graduées induit par l'inclusion $N^{\beta\prime\prime}_{\infty} \subset N^{\alpha\prime\prime}_{\infty}$. De plus, on a un homomorphisme

$$\mu: H^*(N^{\alpha\prime\prime}_{p_\alpha})_y \to \operatorname{Der} H^*(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y$$

d'algèbres de Lie graduées, et ι et μ entrelacent $H^*(N^{\alpha\prime\prime}_{p_\alpha})_y$ et $H^*(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y$. Si $N^{\beta\prime\prime}_{\infty,y}$ est le noyau de l'épimorphisme $\rho^{\#}: R_{\infty,x} \to R''^{\#}_{\infty,z}$, on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^j(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y \xrightarrow{\iota} H^j(R''_p)_y \xrightarrow{\rho^{\#}\cdot\rho^{-1}} H^j(R''^{\#}_q)_z \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(N^{\beta\prime\prime}_{p_\beta})_y \longrightarrow \cdots.$$

(iv) *Si $\alpha \in A$ et $\phi'': N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y} \to N^{\alpha\prime\prime\#}_{\infty,z}$ est un isomorphisme, alors N^{α}_k est un prolongement de $N^{\alpha\prime\prime\#}_{q_\alpha}$ et l'application* (12.7) *est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées. Si $\phi'': R''_{\infty,y} \to R''^{\#}_{\infty,z}$ est un isomorphisme, alors R_k est un prolongement de $R''^{\#}_q$ et N^{α}_k est un prolongement de $N^{\alpha\prime\prime\#}_{q_\alpha}$ et les applications* (12.6) *et* (12.7) *sont des isomorphismes pour tout $\alpha \in A$.*

(v) *Soient Y_1, Z_1 des variétés analytiques, $R'_m \subset J_m(T_{Y_1}; Y_1)$, $R'^{\#}_s \subset J_s(T_{Z_1}; Z_1)$ des équations de Lie analytiques formellement transitives et formellement intégrables et $N^{\alpha\prime}_{m_\alpha} \subset R'_{m_\alpha}$, $N^{\alpha\prime\#}_{s_\alpha} \subset R'^{\#}_{s_\alpha}$ ($\alpha \in A$) des équations de Lie appartenant à $\mathscr{I}(R'_m)$ et $\mathscr{I}(R'^{\#}_s)$. Soient $y_1 \in Y_1$, $z_1 \in Z_1$ et $\phi': R'_{\infty,y_1} \to R'^{\#}_{\infty,z_1}$ un épimorphisme et $\lambda: R''_{\infty,y} \to R'_{\infty,y_1}$, $\lambda^{\#}: R''^{\#}_{\infty,z} \to R'^{\#}_{\infty,z_1}$ des épimorphismes d'algèbres de Lie transitives tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\phi''} & R''^{\#}_{\infty,z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda^{\#}} \\ R'_{\infty,y_1} & \xrightarrow{\phi'} & R'^{\#}_{\infty,z_1} \end{array}$$

soit commutatif et tels que $\phi'(N^{\alpha\prime}_{\infty,y_1}) = N^{\alpha\prime\#}_{\infty,z_1}$ et $\lambda(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}) = N^{\alpha\prime}_{\infty,y_1}$ pour tout $\alpha \in A$. Soit $\gamma \in A$ et supposons que $N^{\gamma\prime\prime}_{\infty,y}$ soit le noyau de $\phi'': R''_{\infty,y} \to R''^{\#}_{\infty,z}$ et que $N^{\gamma\prime}_{\infty,y_1}$ soit le noyau de $\phi': R'_{\infty,y_1} \to R'^{\#}_{\infty,z_1}$. Soient X_1 une variété analytique, $x_1 \in X_1$, et $\rho_1: X_1 \to Y_1$, $\rho_1^{\#}: X_1 \to Z_1$ des submersions analytiques vérifiant $\rho_1(x_1) = y_1$, $\rho_1^{\#}(x_1) = z_1$, et

$$\mathring{R}_d \subset J_d(T_{X_1}; X_1; \rho_1) \cap J_d(T_{X_1}; X_1; \rho_1^{\#})$$

une équation de Lie analytique formellement transitive et formellement intégrable et $\mathring{N}_d^\alpha \subset \mathring{R}_d$ $(\alpha \in A)$ *des équations de Lie formellement intégrables appartenant à* $\mathscr{I}(\mathring{R}_d)$ *donnés par* (i) *tels que* $\mathring{R}_d$ *soit un prolongement de* R'_m *et* $\mathring{N}_d^\alpha$ *un prolongement de* $N_{m_\alpha}^{\alpha'}$, *et*

$$\rho_1^\#(\mathring{R}_{d+l,b}) = R'^\#_{d+l,\rho_1^\#(b)}\,, \qquad \rho_1^\#(\mathring{N}^\alpha_{d+l,b}) = N^{\alpha'\#}_{d+l,\rho_1^\#(b)}$$

pour tous $l \geq 0$, $\alpha \in A$ *et* $b \in X_1$. *On a alors un diagramme commutatif d'algèbres de Lie graduées pour tout* $\alpha \in A$

$$\begin{array}{ccc} H^*(N_{p_\alpha}^{\alpha''})_y & \xrightarrow{\rho^\#\cdot\rho^{-1}} & H^*(N_{q_\alpha}^{\alpha''\#})_z \\ \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^\#} \\ H^*(N_{m_\alpha}^{\alpha'})_{y_1} & \xrightarrow{\rho_1^\#\cdot\rho_1^{-1}} & H^*(N_{s_\alpha}^{\alpha'\#})_{z_1} \end{array} \tag{12.10}$$

dont les homomorphismes $\rho^\#\cdot\rho^{-1}$ *et* $\rho_1^\#\cdot\rho_1^{-1}$ *sont donnés par* (ii); *si* $\lambda\colon N^{\alpha''}_{\infty,y} \to N^{\alpha'}_{\infty,y_1}$ *et* $\lambda^\#\colon N^{\alpha''\#}_{\infty,z} \to N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1}$ *sont des isomorphismes, les homomorphismes* λ *et* $\lambda^\#$ *sont des isomorphismes. Soient* $\alpha, \beta \in A$; *supposons que* $N^{\beta''}_{\infty,y}$ *soit le noyau de* $\phi''\colon N^{\alpha''}_{\infty,y} \to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ *et que* $N^{\beta'}_{\infty,y_1}$ *soit le noyau de* $\phi'\colon N^{\alpha'}_{\infty,y_1} \to N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1}$. *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H^j(N^{\beta''}_{p_\beta})_y & \xrightarrow{\iota} & H^j(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y & \xrightarrow{\rho^\#\cdot\rho^{-1}} & H^j(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(N^{\beta''}_{p_\beta})_y & \to \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^\#} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & \\ \cdots \to & H^j(N^{\beta'}_{m_\beta})_{y_1} & \xrightarrow{\iota} & H^j(N^{\alpha'}_{m_\alpha})_{y_1} & \xrightarrow{\rho_1^\#\cdot\rho_1^{-1}} & H^j(N^{\alpha'\#}_{s_\alpha})_{z_1} & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(N^{\beta'}_{m_\beta})_{y_1} & \to \cdots \end{array} \tag{12.11}$$

dont les lignes exactes sont données par (iii). *De plus, si* $\mu\colon H^*(N^{\alpha'}_{m_\alpha})_{y_1} \to$ Der $H^*(N^{\beta'}_{m_\beta})_{y_1}$ *est l'homomorphisme donné par* (iii), *alors*

$$\lambda(\mu(u)\cdot v) = \mu(\lambda(u))\cdot\lambda(v) \tag{12.12}$$

pour tous $u \in H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y$, $v \in H^*(N^{\beta''}_{p_\beta})_y$.

Démonstration. (i) Il existe une sous-algèbre ouverte L^0 de $R''^0_{\infty,y}$ telle que $\phi''(L^0) \subset R''^{\#0}_{\infty,z}$; on peut prendre par exemple $L^0 = R''^0_{\infty,y} \cap \phi''^{-1}(R''^{\#0}_{\infty,z})$. D'après le théorème 12.2, il existe une variété analytique X, un point $x \in X$, des submersions analytiques $\rho\colon X \to Y$, $\rho'\colon X \to Z$ vérifiant $\rho(x) = y$, $\rho'(x) = z$, des monomorphismes $i\colon R''_{\infty,y} \to J_\infty(T;\rho)_x$, $i^\#\colon R''_{\infty,y} \to J_\infty(T;\rho')_x$ d'algèbres de Lie transitives tels que $L = i(R''_{\infty,y})$ et $L^\# = i^\#(R''_{\infty,y})$ soient des sous-algèbres transitives de $J_\infty(T)_x$ et

$$i(L^0) = L \cap J^0_\infty(T)_x\,, \qquad i^\#(L^0) = L^\# \cap J^0_\infty(T)_x\,,$$

et tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} R''_{\infty,y} & \xrightarrow{i} & J_\infty(T\,;\,\rho)_x \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ R''_{\infty,y} & \longrightarrow & J_\infty(T_Y\,;\,Y)_y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R''_{\infty,y} & \xrightarrow{i^\sharp} & J_\infty(T\,;\,\rho')_x \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi''} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ R''^\sharp_{\infty,z} & \longrightarrow & J_\infty(T_Z\,;\,Z)_z \end{array}$$

soient commutatifs. Considérons l'algèbre de Lie transitive $R''_{\infty,y}$ et sa sous-algèbre fondamentale L^0. D'après le § 10, L^0 permet de définir des filtrations sur $R''_{\infty,y}$ et sur les idéaux fermés $N^{\alpha''}_{\infty,y}$ de $R''_{\infty,y}$, d'où des gradués associés $\operatorname{gr} R''_{\infty,y}$ et $\operatorname{gr} N^{\alpha''}_{\infty,y}$ et leurs groupes de cohomologie $H^{m,j}(\operatorname{gr} R''_{\infty,y})$, $H^{m,j}(\operatorname{gr} N^{\alpha''}_{\infty,y})$. Soit $k \geq k_0$ un entier tel que

$$H^{k+l,j}(\operatorname{gr} R''_{\infty,y}) = H^{k+l,1}(\operatorname{gr} N^{\alpha''}_{\infty,y}) = 0$$

pour tous $l \geq 0$, $j = 1, 2$, $\alpha \in A$, et tel que $N^{\alpha''}_{\infty,y}$ soit défini par un feuilletage dans $(R''_{\infty,y}, R''_{\infty,y} \cap J^k_\infty(T_Y\,;\,Y)_y)$ et $N^{\alpha''\sharp}_{\infty,z}$ le soit dans $(R''^\sharp_{\infty,z}, R''^\sharp_{\infty,z} \cap J^k_\infty(T_Z\,;\,Z)_z)$ pour tout $\alpha \in A$; un tel entier existe toujours en vertu du lemme 10.1 et de la proposition 10.1. En remplaçant X au besoin par un voisinage simplement connexe de x, d'après la remarque qui suit le corollaire 6.1, le théorème 12.2 nous donne maintenant l'existence d'équations de Lie analytiques $R_k \subset J_k(T\,;\,\rho)$, $R^\sharp_k \subset J_k(T\,;\,\rho')$ formellement transitives et formellement intégrables et $\psi \in Q_\infty(\rho)(x, x)$, $\psi^\sharp \in Q_\infty(\rho')(x, x)$ tels que R_k soit un prolongement de R''_p et

$$\rho'(R^\sharp_{k+l,a}) = R''^\sharp_{k+l,\rho'(a)}$$

pour tous $l \geq 0$ et $a \in X$ et

$$\psi : L \to R_{\infty,x}\,, \qquad \psi^\sharp : L^\sharp \to R^\sharp_{\infty,x}$$

soient des isomorphismes et $\pi_{k+1}\psi = \pi_{k+1}\psi^\sharp = I_{k+1}(x)$, et tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\psi} & R_{\infty,x} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\bar\psi} & R''_{\infty,y} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L^\sharp & \xrightarrow{\psi^\sharp} & R^\sharp_{\infty,x} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ R''^\sharp_{\infty,z} & \xrightarrow{\bar\psi^\sharp} & R''^\sharp_{\infty,z} \end{array}$$

soient commutatifs, où $\bar\psi = \rho(\psi)$ et $\bar\psi^\sharp = \rho'(\psi^\sharp)$. Vérifions maintenant que

$$\bar\psi(N^{\alpha''}_{\infty,y}) = N^{\alpha''}_{\infty,y}\,, \tag{12.13}$$

$$\bar\psi^\sharp(N^{\alpha\sharp}_{\infty,z}) = N^{\alpha\sharp}_{\infty,z} \tag{12.14}$$

pour tout $\alpha \in A$. Si I^α est l'idéal fermé $i(N^{\alpha''}_{\infty,y})$ de L, alors on a

$$\bar\psi(N^{\alpha''}_{\infty,y}) = \bar\psi\rho(I^\alpha) = \rho\psi(I^\alpha) \subset \rho(I^\alpha + J^k_\infty(T\,;\,\rho)_x)$$

puisque $\pi_{k+1}\psi = I_{k+1}(x)$; donc

$$\bar{\psi}(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}) \subset N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y} + J^k_\infty(T_Y\,; Y)_y \ .$$

Comme $\bar{\psi}$ est un automorphisme de $R''_{\infty,y}$, on a

$$\bar{\psi}(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}) \subset N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y} + R''_{\infty,y} \cap J^k_\infty(T_Y\,; Y)_y \ .$$

D'après le lemme 10.2 et notre hypothèse sur k, on en déduit que

$$\bar{\psi}(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}) \subset N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y} \ ;$$

donc $\bar{\psi}$ induit un automorphisme de $N^{\alpha\prime\prime}_{p_\alpha+l,y}$, pour $l \geq 0$, et par conséquent $\bar{\psi}$ est un automorphisme de $N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}$, d'où (12.13). Si $I^{\alpha\#}$ est l'idéal fermé $i^\#(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y})$, alors

$$\bar{\psi}^\#(N^{\alpha\prime\prime\#}_{\infty,z}) = \bar{\psi}^\#\phi''(N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}) = \bar{\psi}^\#\rho^\#(I^{\alpha\#}) \ ,$$

et puisque $\pi_{k+1}\psi^\# = I_{k+1}(x)$, le même raisonnement démontre l'égalité (12.14). Considérons les idéaux fermés $\psi(I^\alpha)$ de $R_{\infty,x}$ et $\psi^\#(I^{\alpha\#})$ de $R^\#_{\infty,x}$ et leurs gradués associés pour les filtrations induites par $J_\infty(T)_x$. Puisque $\psi i(L^0) = R^0_{\infty,x}$ et $\psi^\# i^\#(L^0) = R^{\#0}_{\infty,x}$, on a d'après notre hypothèse sur k

$$H^{k+l,1}(\mathrm{gr}\ \psi(I^\alpha)) = H^{k+l,1}(\mathrm{gr}\ \psi^\#(I^{\alpha\#})) = 0$$

pour tous $l \geq 0$ et $\alpha \in A$. Soient $N^\alpha_k \subset R_k$ et $N^{\alpha\#}_k \subset R^\#_k$ ($\alpha \in A$) les équations de Lie formellement intégrables données par le théorème 10.1 telles que l'on ait (12.3) et $N^\alpha_{\infty,x} = \psi(I^\alpha)$, $N^{\alpha\#}_{\infty,x} = \psi^\#(I^{\alpha\#})$. Comme $\pi_{k+1}\psi = \pi_{k+1}\psi^\# = I_{k+1}(x)$, on a

$$(12.15) \qquad \begin{aligned} \pi_k L &= R_{k,x} \ , & \pi_k L^\# &= R^\#_{k,x} \ , \\ \pi_k I^\alpha &= N^\alpha_{k,x} \ , & \pi_k I^{\alpha\#} &= N^{\alpha\#}_{k,x} \ . \end{aligned}$$

De (12.13) et (12.14), on déduit que ρ définit un isomorphisme

$$\rho\colon N^\alpha_{\infty,x} \longrightarrow N^{\alpha\prime\prime}_{\infty,y}$$

et ρ' un épimorphisme

$$\rho'\colon N^{\alpha\#}_{\infty,x} \longrightarrow N^{\alpha\prime\prime\#}_{\infty,z}$$

pour tout $\alpha \in A$. Il existe un isomorphisme unique d'algèbres de Lie $\phi_1\colon L \to L^\#$ tel que $\phi_1 \circ i = i^\#$. Puisque $\phi_1 \cdot i(L^0) = i^\#(L^0)$, on a

$$\phi_1(L \cap J^0_\infty(T)_x) = L^\# \cap J^0_\infty(T)_x \ ;$$

d'après le théorème III de Guillemin-Sternberg [7], il existe donc $\phi \in Q_\infty(x, x)$ qui induit l'isomorphisme ϕ_1. On vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L^{\#} \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ R''_{\infty,y} & \xrightarrow{\phi''} & R''^{\#}_{\infty,z} \end{array}$$

est commutatif, et l'on a évidemment

$$\phi(I^\alpha) = I^{\alpha\#} .$$

D'après (12.15), ϕ définit donc des isomorphismes

$$\pi_{k+1}\phi\colon R_{k,x} \longrightarrow R^{\#}_{k,x} , \qquad \pi_{k+1}\phi\colon N^\alpha_{k,x} \longrightarrow N^{\alpha\#}_{k,x} .$$

D'après la proposition 5.5, il existe une section analytique $\tilde{\phi}$ de Q^0_{k+1} sur un voisinage de x telle que sur ce voisinage l'on ait

$$\tilde{\phi}(R_k) = R^{\#}_k , \qquad \tilde{\phi}(\tilde{R}_k) = \tilde{R}^{\#}_k ,$$

et $\tilde{\phi}(x) = \pi_{k+1}\phi$. Si g_k est le noyau de $\pi_{k-1}\colon R_k \to J_{k-1}(T)$, alors $H^{k+l,j}(g_{k,x})$ et $H^{k+l,j}(\operatorname{gr} R''_{\infty,y})$ sont isomorphes, pour $l \geq 0$, et puisque X est connexe, g_k est 2-acyclique. Alors $\bar{\mathscr{D}}\tilde{\phi}^{-1}$ est une section de $J_0(T)^* \otimes \tilde{R}^{\#}_k$; si $P^{\#}_{k+1}$ est une forme finie analytique de $R^{\#}_{k+1}$, d'après le deuxième théorème fondamental pour les équations de Lie analytiques, il existe une section analytique ψ de $\mathscr{P}^{\#}_{k+1}$ sur un voisinage de x telle que $\bar{\mathscr{D}}\psi = \bar{\mathscr{D}}\tilde{\phi}^{-1}$ et $\psi(x) = I_{k+1}(x)$, de sorte que $\bar{\mathscr{D}}(\psi\cdot\tilde{\phi}) = 0$. On peut donc écrire $\psi\cdot\tilde{\phi} = \tilde{j}_{k+1}(f)$, où f est un difféomorphisme de X défini sur un voisinage connexe U de x (cf. théorème 6.2). On a alors $\tilde{j}_{k+1}(f)(x) = \pi_{k+1}\phi$ et

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(R_{k|U}) = R^{\#}_{k|f(U)} ; \tag{12.16}$$

de la proposition 11.2, il découle que l'on a

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(N^\alpha_{k|U}) = N^{\alpha\#}_{k\,|f(U)} \tag{12.17}$$

pour tout $\alpha \in A$. Considérons la submersion $\rho^{\#} = \rho' \circ f\colon U \to Y$ et remplaçons X par ce voisinage U de x. Puisque $R^{\#}_k \subset J_k(T; \rho')$, de (12.16) il résulte que $R_k \subset J_k(T; \rho^{\#})$ et que l'on a (12.4). De (12.17), on déduit que $\rho^{\#}$ définit un épimorphisme

$$\rho^{\#}\colon N^\alpha_{\infty,x} \longrightarrow N^{\alpha''\#}_{\infty,z} .$$

Le théorème 11.2 (i) nous dit maintenant que N^α_k est ρ-projetable et $\rho^{\#}$-projetable, que N^α_k est un prolongement de $N^{\alpha''}_{p_\alpha}$ et vérifie (12.5). Puisque $j_\infty(f)(x)\cdot\psi\colon L \to R^{\#}_{\infty,x}$ et $\psi^{\#}\cdot\phi\colon L \to R^{\#}_{\infty,x}$ sont des isomorphismes, d'après la proposition 12.1 il existe $\psi' \in Q_\infty(\rho')(x, x)$ tel que $\pi_{k+1}\psi' = I_{k+1}(x)$ et $j_\infty(f)(x)\cdot\psi = \psi'\cdot\psi^{\#}\cdot\phi$, de sorte que $\psi'(R^{\#}_{\infty,x}) = R^{\#}_{\infty,x}$; si $\bar{\psi}' = \rho'(\psi') \in Q_\infty(Z)(z, z)$, on a $\bar{\psi}'(R''^{\#}_{\infty,z}) = R''^{\#}_{\infty,z}$. Alors

$$\rho^{\#}\cdot\psi = \rho'\cdot j_\infty(f)(x)\cdot\psi = \rho'\cdot\psi'\cdot\psi^{\#}\cdot\phi$$

comme applications $R_{\infty,x}\to R''^{\#}_{\infty,z}$; donc

$$\rho^{\#}\cdot\psi\cdot\rho = \bar{\psi}'\cdot\bar{\psi}^{\#}\cdot\phi''\cdot\rho\,, \qquad \rho^{\#}\cdot\rho^{-1}\cdot\bar{\psi} = \bar{\psi}'\cdot\bar{\psi}^{\#}\cdot\phi''$$

comme isomorphismes $R''_{\infty,y}\to R''^{\#}_{\infty,z}$, où ρ^{-1} est l'inverse de $\rho\colon R_{\infty,x}\to R''_{\infty,y}$. On pose $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}'\cdot\bar{\psi}^{\#}$; alors $\pi_{k+1}\bar{\psi}_1 = I_{k+1}(z)$. D'après le lemme 10.2 et notre hypothèse sur k, on a $\bar{\psi}'(N^{\alpha''\#}_{\infty,z}) = N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$, d'où d'après (12.14), $\bar{\psi}_1(N^{\alpha''\#}_{\infty,z}) = N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$, pour tout $\alpha\in A$.

(ii) Le théorème 11.2 (ii) et (iii) et l'application ρ nous donnent des isomorphismes d'algèbres de Lie graduées

$$\rho\colon H^*(N^\alpha_k)_x \to H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y\,, \qquad \rho\colon H^*(R_k)_x\to H^*(R''_p)_y\,.$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[d] & H^*(N^\alpha_k)_x \arrow[r, "\rho^{\#}"] \arrow[d] & H^*(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z \arrow[d] \\
H^*(R''_p)_y \arrow[r, "\rho^{-1}"] & H^*(R_k)_x \arrow[r, "\rho^{\#}"] & H^*(R''^{\#}_q)_z
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont induites par des inclusions d'équations de Lie et les flèches horizontales sont données par le théorème 11.2 (ii) et les applications ρ et $\rho^{\#}$; on en déduit le diagramme (12.8).

(iii) Si $\rho^{-1}\colon R''_{\infty,y}\to L$ est l'inverse de l'isomorphisme $\rho\colon L\to R''_{\infty,y}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N^{\alpha''}_{\infty,y} \arrow[r, "\psi^{\#}\cdot\phi\cdot\rho^{-1}"] \arrow[drr, "\bar{\psi}^{\#}\cdot\phi''"'] \arrow[dd] & N^{\alpha\#}_{\infty,x} \arrow[dr, "\rho'"] \arrow[dd] & \\
 & & N^{\alpha''\#}_{\infty,z} \arrow[dd] \\
R''_{\infty,y} \arrow[r, "\psi^{\#}\cdot\phi\cdot\rho^{-1}"] \arrow[drr, "\bar{\psi}^{\#}\cdot\phi''"'] & R^{\#}_{\infty,x} \arrow[dr, "\rho'"] & \\
 & & R''^{\#}_{\infty,z}
\end{tikzcd}$$

dont les applications $\psi^{\#}\cdot\phi\cdot\rho^{-1}\colon N^{\alpha''}_{\infty,y}\to N^{\alpha\#}_{\infty,x}$ et $\psi^{\#}\cdot\phi\cdot\rho^{-1}\colon R''_{\infty,y}\to R^{\#}_{\infty,x}$ sont des isomorphismes, est commutatif. Donc si $N^{\beta''}_{\infty,y}$ est le noyau de $\phi''\colon N^{\alpha''}_{\infty,y}\to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$, puisque $\bar{\psi}^{\#}$ est un automorphisme de $N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$, alors on voit que $N^{\beta\#}_{\infty,x}$ est le noyau de $\rho'\colon N^{\alpha\#}_{\infty,x}\to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ et d'après (12.17) que $N^{\beta}_{\infty,x}$ est le noyau de $\rho^{\#}\colon N^{\alpha}_{\infty,x}\to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$. D'après le théorème 11.2 (ii), on a la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^j(N_k^\beta)_x \xrightarrow{\iota} H^j(N_k^\alpha)_x \xrightarrow{\rho^\#} H^j(N_{q_\alpha}^{\alpha''\#})_z \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(N_k^\beta)_x \longrightarrow \cdots,$$

dont on déduit la suite exacte (12.9) à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^j(N_{p_\beta}^{\beta''})_y & \xrightarrow{\rho^{-1}} & H^j(N_k^\beta)_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^j(N_{p_\alpha}^{\alpha''})_y & \xrightarrow{\rho^{-1}} & H^j(N_k^\alpha)_x \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes (cf. (ii)) et les flèches verticales sont induites par les inclusions $N_\infty^{\beta''} \subset N_\infty^{\alpha''}$ et $N_k^\beta \subset N_k^\alpha$. Le théorème 11.2 (iii) nous donne un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\mu: H^*(N_k^\alpha)_x \longrightarrow \operatorname{Der} H^*(N_k^\beta)_x$$

tel que ι et μ entrelacent $H^*(N_k^\alpha)_x$ et $H^*(N_k^\beta)_x$. A l'aide des isomorphismes ρ^{-1} d'algèbres de Lie graduées, on obtient l'homomorphisme d'algèbres de Lie graduées

$$\mu: H^*(N_{p_\alpha}^{\alpha''})_y \longrightarrow \operatorname{Der} H^*(N_{p_\beta}^{\beta''})_y$$

tel que ι et μ entrelacent $H^*(N_{p_\alpha}^{\alpha''})_y$ et $H^*(N_{p_\beta}^{\beta''})_y$.

(iv) découle directement de (iii).

(v) Puisque $\rho_1: \mathring{R}_{\infty,x_1} \to R'_{\infty,y_1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie transitives, $\rho_1^{-1}\cdot\lambda\cdot\rho: R_{\infty,x} \to \mathring{R}_{\infty,x_1}$ est un épimorphisme; pour tout $\alpha \in A$, l'image de $N_{\infty,x}^\alpha$ par cette dernière application est égale à $\mathring{N}_{\infty,x_1}^\alpha$. D'après (i), il existe une variété analytique connexe X_0 et $x_0 \in X_0$, des submersions analytiques $\sigma: X_0 \to X$, $\sigma_1: X_0 \to X_1$ vérifiant $\sigma(x_0) = x$, $\sigma_1(x_0) = x_1$, une équation de Lie analytique

$$S_h \subset J_h(T_{X_0}; X_0; \sigma) \cap J_h(T_{X_0}; X_0; \sigma_1)$$

formellement transitive et formellement intégrable et des équations de Lie $S_h^\alpha \subset S_h$ $(\alpha \in A)$ formellement intégrables appartenant à $\mathscr{I}(S_h)$ tels que S_h soit un prolongement de R_k et S_h^α un prolongement de N_k^α pour tout $\alpha \in A$, et tels que

$$\sigma_1(S_{h+l,a}) = \mathring{R}_{h+l,\sigma_1(a)}, \qquad \sigma_1(S_{h+l,a}^\alpha) = \mathring{N}_{h+l,\sigma_1(a)}^\alpha$$

pour tous $a \in X_0$, $l \geq 0$ et $\alpha \in A$. Alors, puisque $N_{\infty,x}^\tau$ est le noyau de $\rho^\#: R_{\infty,x} \to R''^{\#}_{\infty,\rho^\#(x)}$, d'après (iii), S_{∞,x_0}^τ est le noyau de $\rho^\# \circ \sigma: S_{\infty,x_0} \to R''^{\#}_{\infty,\rho^\#(x)}$. D'après la proposition 10.3, S_h^τ appartient à $\mathscr{F}(S_h)$; soit W le sous-fibré intégrable $\pi_0 \tilde{S}_h^\tau$ de T_{X_0}. D'après le théorème 11.3 (i), il existe une variété différentiable Z_0, une submersion $\tau_0: X_0 \to Z_0$ définie sur un voisinage de x_0, une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable $S_{h_1}^\# \subset J_{h_1}(T_{Z_0}; Z_0)$, avec

$h_1 \geq h$, telles que le fibré des vecteurs tangents aux fibres de τ_0 soit égal à W et telles que S_h soit τ_0-projetable et

$$\tau_0(S_{h_1+l,a}) = S^{\#}_{h_1+l,\tau_0(a)}$$

pour tous a appartenant à un voisinage de x_0 et $l \geq 0$. Comme $\sigma_1(S^{\gamma}_{h,a}) = \mathring{N}^{\gamma}_{h,\sigma_1(a)}$ pour tout $a \in X_0$ et $\mathring{N}^{\gamma}_{\infty,x_1}$ est le noyau de $\rho_1^{\#}: \mathring{R}_{\infty,x_1} \to R'^{\#}_{\infty,z_1}$, on a $\rho_1^{\#}\sigma_1(W) = 0$. D'autre part, $\rho_1^{\#}\sigma_1(S_{h+l,a}) = R'^{\#}_{h+l,\rho_1^{\#}(\sigma_1(a))}$ pour tous $a \in X_0$ et $l \geq 0$. Donc, en remplaçant X_0 par un voisinage connexe de x_0 et Z_0 par un voisinage de $\tau_0(x_0)$, on peut supposer que τ_0 est surjectif, et, d'après le théorème 11.3 (ii), que l'on a des submersions $\tau: Z_0 \to Z$ et $\tau_1: Z_0 \to Z_1$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\sigma} & X_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_1^{\#}} \\ Z & \xleftarrow{\tau} & Z_0 & \xrightarrow{\tau_1} & Z_1 \end{array} \tag{12.18}$$

soit commutatif, et telles que $S^{\#}_{h_1}$ soit τ-projetable et τ_1-projetable et un prolongement de $R''^{\#}_q$ et telles que

$$\tau_1(S^{\#}_{h_1+l,b}) = R'^{\#}_{h_1+l,\tau_1(b)}$$

pour tous $b \in Z_0$ et $l \geq 0$. Le théorème 11.2 nous donne des équations de Lie $S^{\alpha\#}_{h_\alpha} \in \mathscr{I}(S^{\#}_{h_1})$, avec $h_\alpha \geq h_1$, $\alpha \in A$, telles que

$$\tau_0(S^{\alpha}_{h_\alpha+l,a}) = S^{\alpha\#}_{h_\alpha+l,\tau_0(a)}$$

pour tous $a \in X_0$, $\alpha \in A$ et $l \geq 0$. Le théorème 11.2 nous dit que $S^{\alpha\#}_{h_\alpha}$ est τ-projetable et τ_1-projetable, et (12.18) implique que

$$\tau(S^{\alpha\#}_{h_\alpha+l,b}) = N^{\alpha''\#}_{h_\alpha+l,\tau(b)}\,, \qquad \text{pour } h_\alpha + l \geq q_\alpha\,,$$
$$\tau_1(S^{\alpha\#}_{h_\alpha+l,b}) = N^{\alpha'\#}_{h_\alpha+l,\tau_1(b)}\,, \qquad \text{pour } h_\alpha + l \geq s_\alpha\,,$$

pour tous $b \in Z_0$ et $\alpha \in A$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} N^{\alpha''}_{\infty,y} & \xleftarrow{\rho} & N^{\alpha}_{\infty,x} & \xleftarrow{\sigma} & S^{\alpha}_{\infty,x_0} & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathring{N}^{\alpha}_{\infty,x_1} & \xrightarrow{\rho_1} & N^{\alpha'}_{\infty,y_1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_1^{\#}} & & \\ & & N^{\alpha''\#}_{\infty,z} & \xleftarrow{\tau} & S^{\alpha\#}_{\infty,z_0} & \xrightarrow{\tau_1} & N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1} & & \end{array} \tag{12.19}$$

où $z_0 = \tau_0(x_0)$ et ρ, σ, ρ_1 sont des isomorphismes. Puisque $\rho^{\#}: N^{\alpha}_{\infty,x} \to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ est un épimorphisme et $\tau: S^{\#}_{\infty,z_0} \to R''^{\#}_{\infty,z}$, $\sigma: S^{\alpha}_{\infty,x_0} \to N^{\alpha}_{\infty,x}$ sont des isomorphismes, on voit que $\tau: S^{\alpha\#}_{\infty,z_0} \to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ est un isomorphisme. Il en résulte que $S^{\alpha\#}_{h_\alpha}$ est un prolongement de $N^{\alpha''\#}_{q_\alpha}$ pour tout $\alpha \in A$. D'après la proposition 11.3 (i) et le théorème 11.2 (ii), au diagramme (12.19) correspond le diagramme commutatif d'algèbres de Lie graduées

$$\begin{tikzcd}
H^*(N^{\alpha''}_{p_\alpha})_y & & H^*(N^{\alpha'}_{m_\alpha})_{y_1} \\
H^*(N^\alpha_k)_x \arrow[u, "\rho"] \arrow[d, "\rho^\#"] & H^*(S^\alpha_h)_{x_0} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\tau_0"] & H^*(\mathring{N}^\alpha_d)_{x_1} \arrow[u, "\rho_1"'] \arrow[d, "\rho_1^\#"] \\
H^*(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z & H^*(S^{\alpha\#}_{h_\alpha})_{z_0} \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\tau_1"] & H^*(N^{\alpha'\#}_{s_\alpha})_{z_1}
\end{tikzcd}$$

dont les flèches $\rho, \sigma, \rho_1, \tau$ sont des isomorphismes. On pose $\lambda = \rho_1 \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ et $\lambda^\# = \tau_1 \circ \tau^{-1}$ et on obtient le diagramme commutatif (12.10). Soient $\alpha, \beta \in A$; on suppose que $N^{\beta''}_{\infty,y}$ est le noyau de $\phi'' : N^{\alpha''}_{\infty,y} \to N^{\alpha''\#}_{\infty,z}$ et que $N^{\beta'}_{\infty,y_1}$ est le noyau de $\phi' : N^{\alpha'}_{\infty,y_1} \to N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1}$. D'après (iii), on voit que $\mathring{N}^\beta_{\infty,x_1}$ est le noyau de $\rho_1^\# : \mathring{N}^\alpha_{\infty,x_1} \to N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1}$; de plus, S^β_{∞,x_0} est le noyau de $\tau_0 : S^\alpha_{\infty,x_0} \to S^{\alpha\#}_{\infty,z_0}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
N^{\beta''}_{\infty,y} \arrow[d] & N^\beta_{\infty,x} \arrow[l, "\rho"', "\sim"] \arrow[d] & S^\beta_{\infty,x_0} \arrow[l, "\sigma"', "\sim"] \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d] & \mathring{N}^\beta_{\infty,x_1} \arrow[r, "\rho_1", "\sim"'] \arrow[d] & N^{\beta'}_{\infty,y_1} \arrow[d] \\
N^{\alpha''}_{\infty,y} & N^\alpha_{\infty,x} \arrow[l, "\rho"', "\sim"] \arrow[d, "\rho^\#"] & S^\alpha_{\infty,x_0} \arrow[l, "\sigma"', "\sim"] \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathring{N}^\alpha_{\infty,x_1} \arrow[r, "\rho_1", "\sim"'] \arrow[d, "\rho_1^\#"] & N^{\alpha'}_{\infty,y_1} \\
& N^{\alpha''\#}_{\infty,z} & S^{\alpha\#}_{\infty,z_0} \arrow[l, "\tau"', "\sim"] \arrow[r, "\tau_1"] & N^{\alpha'\#}_{\infty,z_1} &
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes et dont les applications σ_1, τ_1 sont des épimorphismes. Le théorème 11.2 (ii) nous donne des applications $\partial : H^j(S^{\alpha\#}_{h_\alpha})_{z_0} \to H^{j+1}(S^\beta_h)_{x_0}$, $\partial : H^j(N^{\alpha'\#}_{q_\alpha})_{z_1} \to H^{j+1}(\mathring{N}^\beta_d)_{x_1}$ et la proposition 11.3 (ii) nous dit que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^j(N^{\alpha''\#}_{q_\alpha})_z \arrow[d, "\partial"] & H^j(S^{\alpha\#}_{h_\alpha})_{z_0} \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\partial"] & H^j(N^{\alpha'\#}_{q_\alpha})_{z_1} \arrow[d, "\partial"] \\
H^{j+1}(N^\beta_k)_x & H^{j+1}(S^\beta_h)_{x_0} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\sigma_1"] & H^{j+1}(\mathring{N}^\beta_d)_{x_1}
\end{tikzcd}$$

est commutatif et que l'on a

$$\sigma(\mu(u) \cdot v) = \mu(\sigma(u)) \cdot \sigma(v) , \qquad \sigma_1(\mu(u) \cdot v) = \mu(\sigma_1(u)) \cdot \sigma_1(v)$$

pour tous $u \in H^*(S^\alpha_h)_{x_0}$, $v \in H^*(S^\beta_h)_{x_0}$, où les applications μ nous sont données par le théorème 11.2 (iii). Il en résulte que le diagramme (12.11) est commutatif et que l'on a la relation (12.12), ce qui termine la démonstration du théorème.

Nous donnons maintenant la notion d'isomorphisme ou d'équivalence locale d'équations de Lie introduite par Cartan, qui généralise la notion d'isomorphisme d'équations de Lie sur une même variété.

Soient $N''_{p_0} \subset R''_{p_0}$, $N''^{\#}_{q_0} \subset R''^{\#}_{q_0}$ des équations de Lie appartenant à $\mathscr{I}(R''_p)$ et $\mathscr{I}(R''^{\#}_q)$ respectivement. Nous dirons que (R''_p, N''_{p_0}, y) et $(R''^{\#}_q, N''^{\#}_{q_0}, z)$ sont (localement) isomorphes s'il existe une variété différentiable X, des submersions $\rho : X \to Y$, $\rho^{\#} : X \to Z$ et $x \in X$, vérifiant $\rho(x) = y$, $\rho^{\#}(x) = z$, une équation de Lie $R_k \subset J_k(T\,;\rho) \cap J_k(T\,;\rho^{\#})$ formellement transitive et formellement intégrable et une équation de Lie $N_k \subset R_k$ appartenant à $\mathscr{I}(R_k)$ tels que R_k soit un prolongement de R''_p et de $R''^{\#}_q$ et N_k un prolongement de N''_{p_0} et de $N''^{\#}_{q_0}$.

Pour que (R''_p, N''_{p_0}, y) et $(R''^{\#}_q, N''^{\#}_{q_0}, z)$ soient isomorphes, il faut qu'il existe un isomorphisme $\phi'' : R''_{\infty,y} \to R''^{\#}_{\infty,z}$ d'algèbres de Lie transitives tel que $\phi''(N''_{\infty,y}) = N''^{\#}_{\infty,z}$.

Nous dirons que (R''_p, y) et $(R''^{\#}_q, z)$ sont (localement) isomorphes si (R''_p, R''_p, y) et $(R''^{\#}_q, R''^{\#}_q, z)$ sont (localement) isomorphes. Au § 6, nous avons montré que, si $R_k, R^{\#}_k$ sont deux équations de Lie analytiques sur une variété analytique X formellement transitives et formellement intégrables, et si $x, x^{\#} \in X$, alors (R_k, x) et $(R^{\#}_k, x^{\#})$ sont localement isomorphes sur X si et seulement s'il existe $\phi \in Q_\infty(x, x^{\#})$ tel que $\phi(R_{\infty,x}) = R^{\#}_{\infty,x^{\#}}$. Du théorème 12.3 (i) et (iv), on déduit la généralisation suivante de ce résultat:

Théorème 12.4. *Supposons que R''_p et $R''^{\#}_q$ soient des équations analytiques.*

(i) *(R''_p, N''_{p_0}, y) et $(R''^{\#}_q, N''^{\#}_{q_0}, z)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme $\phi'' : R''_{\infty,y} \to R''^{\#}_{\infty,z}$ d'algèbres de Lie transitives tel que $\phi''(N''_{\infty,y}) = N''^{\#}_{\infty,z}$.*

(ii) *Si l'une des conditions de* (i) *est remplie, alors on a un diagramme commutatif d'algèbres de Lie graduées*

$$\begin{array}{ccc} H^*(N''_{p_0})_y & \xrightarrow{\sim} & H^*(N''^{\#}_{q_0})_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(R''_p)_y & \xrightarrow{\sim} & H^*(R''^{\#}_q)_z \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par les inclusions $N''_{p_0} \subset R''_{p_0}$ et $N''^{\#}_{q_0} \subset R''^{\#}_{q_0}$ et les flèches horizontales sont des isomorphismes.

Le théorème précédent nous montre que la relation d'isomorphisme local entre de tels triplets (R''_p, N''_{p_0}, y), où R''_p est une équation de Lie analytique, est une relation d'équivalence. En prenant $p = p_0$, $q = q_0$, $N''_p = R''_p$ et $N''^{\#}_q = R''^{\#}_q$ dans le théorème précédent, on obtient le résultat suivant qui implique que la relation d'isomorphisme local d'équations de Lie analytiques est aussi une relation d'équivalence.

Corollaire 12.2. *Soient* $R''_p \subset J_p(T_Y; Y)$, $R''^{\sharp}_q \subset J_q(T_Z; Z)$ *des équations de Lie analytiques formellement transitives et formellement intégrables.*

(i) (*Kuranishi* [22], *Petitjean* [24]) *Si* $y \in Y$ *et* $z \in Z$, *alors les couples* (R''_p, y) *et* $(R''^{\sharp}_q, z)$ *sont isomorphes si et seulement si les algèbres de Lie transitives* $R''_{\infty,y}$ *et* $R''^{\sharp}_{\infty,z}$ *sont isomorphes.*

(ii) *Si l'une des conditions de* (i) *est remplie, alors on a un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées*

$$H^*(R''_p)_y \xrightarrow{\sim} H^*(R''^{\sharp}_q)_z .$$

13. Cohomologie de Spencer d'algèbres de Lie transitives

Soient L une algèbre de Lie transitive et I un idéal fermé de L. D'après le corollaire 6.1 et le théorème 10.1, il existe une équation de Lie analytique formellement transitive et formellement intégrable $R_p \subset J_p(T_Y; Y)$ sur une variété analytique Y, un point $y \in Y$, une équation de Lie $N_p \subset R_p$ appartenant à $\mathscr{I}(R_p)$ tels que $(R_{\infty,y}, N_{\infty,y})$ et (L, I) soient isomorphes en tant que couples d'algèbres de Lie topologiques. On pose

$$H^*(L) = \bigoplus_{j \geq 0} H^j(L) , \qquad H^j(L) = H^j(R''_p)_y ,$$
$$H^*(L, I) = \bigoplus_{j \geq 0} H^j(L, I) , \qquad H^j(L, I) = H^j(N''_p)_y ,$$

et on appelle $H^j(L)$ le j-ième groupe de cohomologie de Spencer de L et $H^j(L, I)$ le j-ième groupe de cohomologie de Spencer de l'idéal fermé I de L. On a évidemment $H^*(L, L) = H^*(L)$.

Théorème 13.1. (i) *L'algèbre de Lie graduée* $H^*(L, I)$ *d'un idéal fermé* I *d'une algèbre de Lie transitive* L *est bien définie et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de* (L, I) *en tant que couples d'algèbres de Lie topologiques.*

(ii) *Si* $\phi: L \to L''$ *est un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives et* $I \subset L$, $I'' \subset L''$ *des idéaux fermés de* L *et* L'' *tels que* $\phi(I) = I''$, *alors on a un homomorphisme*

$$H^*(\phi): H^*(L, I) \to H^*(L'', I'')$$

d'algèbres de Lie graduées qui est défini à des automorphismes des algèbres de Lie graduées près. Si $\psi: L'' \to L'''$ *est un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives et* $I''' \subset L'''$ *est un idéal fermé de* L''' *tels que* $\psi(I'') = I'''$, *alors le diagramme*

(13.1)
$$\begin{tikzcd} H^*(L, I) \arrow[d, "H^*(\phi)"'] \arrow[dr, "H^*(\psi\cdot\phi)"] & \\ H^*(L'', I'') \arrow[r, "H^*(\psi)"'] & H^*(L''', I''') \end{tikzcd}$$

est commutatif à des automorphismes des algèbres de Lie graduées près.

(iii) *Si I' est le noyau de $\phi: I \to I''$, on a des homomophismes d'algèbres de Lie graduées*

$$\iota: H^*(L,I') \to H^*(L,I)\ , \qquad \mu: H^*(L,I) \to \operatorname{Der} H^*(L,I')\ ,$$

qui entrelacent $H^*(L,I)$ et $H^*(L,I')$, et une suite exacte

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^j(L,I') \xrightarrow{\iota} H^j(L,I) \xrightarrow{H^j(\phi)} H^j(L'',I'')\\ \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(L,I') \longrightarrow \cdots\ ,\end{aligned} \tag{13.2}$$

qui sont définis à des automorphismes des groupes de cohomologie près.

(iv) *Soient $\psi^\#: L \to L^\#$, $\phi^\#: L^\# \to L'''$ des épimorphismes d'algèbres de Lie transitives tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L'' \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^\#} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ L^\# & \xrightarrow{\phi^\#} & L''' \end{array} \tag{13.3}$$

soit commutatif et soient J le noyau de $\phi: L \to L''$ et $J^\#$ le noyau de $\phi^\#: L^\# \to L'''$. Si $\psi^\#(J) = J^\#$ et $I^\#, I'^\#$ sont des idéaux fermés de $L^\#$ tels que $I'^\# = I^\# \cap J^\#$, $\psi^\#(I) = I^\#$, $\psi^\#(I') = I'^\#$ et $\phi^\#(I^\#) = I'''$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to H^j(L,I') & \xrightarrow{\iota} & H^j(L,I) & \xrightarrow{H^j(\phi)} & H^j(L'',I'') & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(L,I') \to \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle H^j(\psi^\#)} & & \downarrow{\scriptstyle H^j(\psi^\#)} & & \downarrow{\scriptstyle H^j(\psi)} & & \downarrow{\scriptstyle H^{j+1}(\psi^\#)} \\ \cdots \to H^j(L^\#,I'^\#) & \xrightarrow{\iota} & H^j(L^\#,I^\#) & \xrightarrow{H^j(\phi^\#)} & H^j(L''',I''') & \xrightarrow{\partial} & H^{j+1}(L^\#,I'^\#) \to \cdots \end{array}$$

est commutatif et la relation

$$H^*(\psi^\#)(\mu(\alpha)\cdot\beta) = \mu(H^*(\psi^\#)\alpha)\cdot H^*(\psi^\#)\beta$$

pour tous $\alpha \in H^*(L,I)$, $\beta \in H^*(L,I')$, est vérifiée à des automorphismes d'algèbres de Lie graduées près.

Démonstration. Soient $L, L'', L^\#, L'''$ des algèbres de Lie transitives, $I, I', J \subset L$, $I'' \subset L''$, $I^\#, I'^\#, J^\# \subset L^\#$, $I''' \subset L'''$ des idéaux fermés et $\phi: L \to L''$, $\phi^\#: L^\# \to L'''$, $\psi: L''' \to L^\#$, $\psi^\#: L \to L^\#$ des épimorphismes d'algèbres de Lie transitives tels que le diagramme (13.3) soit commutatif et $\phi(I) = I''$, $\psi(I'') = I'''$, $\psi^\#(I) = I^\#$, $\psi^\#(I') = I'^\#$, $\psi^\#(J) = J^\#$, $\phi^\#(I^\#) = I'''$. Supposons que J soit le noyau de $\phi: L \to L''$ et $J^\#$ le noyau de $\phi^\#: L^\# \to L'''$, et que $I' = I \cap J$ et $I'^\# = I^\# \cap J^\#$. Soient $R_p \subset J_p(T_Y; Y)$, $R''_q \subset J_q(T_Z; Z)$, $R^\#_m \subset J_m(T_{Y_1}; Y_1)$, $R'''_s \subset$

$J_s(T_{Z_1}; Z_1)$ des équations de Lie analytiques formellement transitives et formellement intégrables sur des variétés analytiques Y, Z, Y_1, Z_1, et $y \in Y, z \in Z$, $y_1 \in Y_1, z_1 \in Z_1$, et soient $N_p, N'_p, S_p \in \mathscr{I}(R_p)$, $N''_q \in \mathscr{I}(R''_q)$, $N^\#_m, N'^\#_m, S^\#_m \in \mathscr{I}(R^\#_m)$, $N'''_s \in \mathscr{I}(R'''_s)$ des équations de Lie et

$$\lambda: L \to R_{\infty,y}, \qquad \lambda'': L'' \to R''_{\infty,z},$$
$$\lambda^\#: L^\# \to R^\#_{\infty,y_1}, \qquad \lambda''': L''' \to R'''_{\infty,z_1}$$

des isomorphismes d'algèbres de Lie transitives tels que

$$\lambda(I) = N_{\infty,y}, \qquad \lambda(I') = N'_{\infty,y}, \qquad \lambda(J) = S_{\infty,y},$$
$$\lambda^\#(I^\#) = N^\#_{\infty,y_1}, \qquad \lambda(I'^\#) = N'^\#_{\infty,y_1}, \qquad \lambda(J^\#) = S^\#_{\infty,y_1},$$
$$\lambda''(I'') = N''_{\infty,z}, \qquad \lambda'''(I''') = N'''_{\infty,z_1}.$$

Le diagramme d'algèbres de Lie transitives

$$\begin{tikzcd} R_{\infty,y} \arrow[r, "\lambda''\cdot\phi\cdot\lambda^{-1}"] \arrow[d, "\lambda^\#\cdot\psi^\#\cdot\lambda^{-1}"] & R''_{\infty,z} \arrow[d, "\lambda'''\cdot\psi\cdot\lambda''^{-1}"] \\ R^\#_{\infty,y_1} \arrow[r, "\lambda'''\cdot\phi^\#\cdot\lambda^{\#-1}"] & R'''_{\infty,z_1} \end{tikzcd}$$

dont les flèches sont des épimorphismes, est commutatif. Le théorème 12.3 (ii) et (iv) nous donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(N_p)_y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & H^*(N''_q)_z \arrow[d, "\iota"] \\ H^*(R_p)_y \arrow[r, "\phi"] & H^*(R''_q)_z \end{tikzcd} \tag{13.4}$$

d'algèbres de Lie graduées, dont les flèches ϕ sont des isomorphismes lorsque $\phi: L \to L''$ est un isomorphisme. D'autre part, en considérant les familles d'équations de Lie $N_p, N'_p, S_p \in \mathscr{I}(R_p)$, $N^\#_m, N'^\#_m, S^\#_m \in \mathscr{I}(R^\#_m)$, $N''_q \in \mathscr{I}(R''_q)$, $N'''_s \in \mathscr{I}(R'''_s)$, le théorème 12.3 (iii) et (v) nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^j(N'_p)_y \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\psi^\#"] & H^j(N_p)_y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi^\#"] & H^j(N''_q)_z \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\psi"] & H^{j+1}(N'_p)_y \arrow[r] \arrow[d, "\psi^\#"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^j(N'^\#_m)_{y_1} \arrow[r, "\iota"] & H^j(N^\#_m)_{y_1} \arrow[r, "\phi^\#"] & H^j(N'''_s)_{z_1} \arrow[r, "\partial"] & H^{j+1}(N'^\#_m)_{y_1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{13.5}$$

et des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées

$$\mu: H^*(N_p)_y \to \operatorname{Der} H^*(N'_p)_y, \qquad \mu: H^*(N^\#_m)_{y_1} \to \operatorname{Der} H^*(N'^\#_m)_{y_1}$$

tels que

$$\psi^{\#}(\mu(\alpha)\cdot\beta) = \mu(\psi^{\#}(\alpha))\cdot\psi^{\#}(\beta) \tag{13.6}$$

pour tous $\alpha \in H^*(N_p)_y$, $\beta \in H^*(N'_p)_y$.

(i) Supposons que $\phi: L \to L''$ soit un isomorphisme. Le diagramme (13.4), dont les flèches horizontales sont alors des isomorphismes, nous montre que l'algèbre de Lie graduée $H^*(L, I)$ est bien définie et ne dépend que de la classe d'isomorphisme du couple (L, I) d'algèbres de Lie topologiques.

(ii) Supposons d'abord que $\psi^{\#}: L \to L^{\#}$ et $\psi: L \to L'''$ soient des isomorphismes. Alors d'après le théorème 12.3 (iv), les flèches verticales du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(N_p)_y & \xrightarrow{\phi} & H^*(N''_q)_z \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ H^*(N^{\#}_m)_{y_1} & \xrightarrow{\phi^{\#}} & H^*(N'''_s)_{z_1} \end{array} \tag{13.7}$$

d'algèbres de Lie graduées sont des isomorphismes, ce qui nous montre que l'homomorphisme d'algèbres de Lie graduées $H^*(\phi): H^*(L, I) \to H^*(L'', I'')$ déterminé par $\phi: H^*(N_p)_y \to H^*(N''_q)_z$ est bien défini à des automorphismes près. Supposons maintenant que seul $\phi^{\#}: L^{\#} \to L'''$ est un isomorphisme. Alors $J^{\#} = \{0\}$ et la flèche $\phi^{\#}$ du diagramme commutatif (13.7) est un isomorphisme, ce qui nous montre que le diagramme (13.1) est commutatif à des automorphismes près.

(iii) Supposons à nouveau que $\psi^{\#}: L \to L^{\#}$ et $\psi: L'' \to L'''$ soient des isomorphismes. Alors les flèches verticales des diagrammes (13.7) et (13.5) sont des isomorphismes; donc de (13.5) et de (13.6), on déduit la suite exacte (13.2) et les homomorphismes ι et μ.

(iv) découle directement de la commutativité de (13.5) et de (13.6).

Corollaire 13.1. (i) *Si $\phi: L \to L''$ est un épimorphisme d'algèbres de Lie transitives et I' est le noyau de ϕ, on a une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow H^j(L, I') \xrightarrow{\iota} H^j(L) \xrightarrow{H^j(\phi)} H^j(L'') \xrightarrow{\partial} H^{j+1}(L, I') \longrightarrow \cdots .$$

(ii) *Si $I \subset L$, $I'' \subset L''$ sont des idéaux fermés tels que $\phi: I \to I''$ soit un isomorphisme, alors*

$$H^*(\phi): H^*(L, I) \to H^*(L'', I'')$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

Corollaire 13.2. *Les algèbres de Lie $H^0(L) = H^0(R_p)_x$ des germes en x de solutions de R_p et $H^0_\omega(L) = H^0_\omega(R_p)_x$ des germes en x de solutions analytiques* *de R_p ne dépendent, à isomorphisme près, que de la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Lie topologique L.*

Théorème 13.2. *Si M est une sous-algèbre fermée d'une algèbre de Lie transitive L et s'il existe une sous-algèbre fondamentale L^0 de L telle que $L = M + L^0$, alors M est une algèbre de Lie transitive et on a des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées*

$$H^*(M) \to H^*(L) ,$$

$$H^*(M, J) \to H^*(L, I) , \tag{13.8}$$

pour tout idéal fermé J de M contenu dans un idéal fermé I de L, qui sont déterminés à des automorphismes d'algèbres de Lie graduées près. Si I est un idéal fermé de L contenu dans M, alors (13.8) *détermine un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées*

$$H^*(M, I) \to H^*(L, I) .$$

Démonstration. Si $L = M + L^0$, alors $M^0 = M \cap L^0$ est une sous-algèbre ouverte de M qui ne contient aucun idéal de M autre que $\{0\}$ telle que M/M^0 soit isomorphe à L/L^0. Donc M est une algèbre de Lie transitive. Soient J un idéal fermé de M et I un idéal fermé de L contenant J. Considérons les filtrations induites par M^0 et L^0 sur J, M, I et L; soit $k \geq 1$ un entier tel que

$$H^{k+l,1}(\mathrm{gr}\, J) = H^{k+l,1}(\mathrm{gr}\, I) = 0 , \qquad H^{k+l,j}(\mathrm{gr}\, M) = H^{k+l,j}(\mathrm{gr}\, L) = 0$$

pour tout $l \geq 0$ et $j = 1, 2$. D'après le lemme 10.1, un tel entier existe toujours. Soit $i: L \to J_\infty(T)_x$ un monomorphisme d'algèbres de Lie transitives, où x appartient à une variété analytique X, tel que $i(L^0) = i(L) \cap J^0_\infty(T)_x$ et $i(L)$ soit une sous-algèbre transitive de $J_\infty(T)_x$. Alors $i(M)$ est une sous-algèbre transitive de $J_\infty(T)_x$ et $i(M^0) = i(M) \cap J^0_\infty(T)_x$. En remplaçant X au besoin par un voisinage simplement connexe de x, il existe d'après le corollaire 6.1 et le théorème 4.1 des équations de Lie analytiques R'_k, R_k dans $J_k(T)$ formellement transitives et formellement intégrables et $F, G \in Q_\infty(x, x)$ tels que $R'_k \subset R_k$ et

$$R'_{k,x} = \pi_k i(M) , \qquad R_{k,x} = \pi_k i(L) ,$$
$$Gi(M) = R'_{\infty,x} , \qquad Fi(L) = R_{\infty,x} ,$$
$$\pi_{k+1} F = \pi_{k+1} G = I_{k+1}(x) .$$

Soient $N'_k \subset R'_k$, $N_k \subset R_k$ les équations de Lie données par le théorème 10.1 appartenant à $\mathscr{I}(R'_k)$, $\mathscr{I}(R_k)$ respectivement telles que $N'_{\infty,x} = Gi(J)$, $N_{\infty,x} = Fi(I)$, de sorte que l'on a

$$N'_{k,x} = \pi_k i(J) \subset \pi_k i(I) = N_{k,x} .$$

Puisque N'_k et N_k sont stables par la dérivée covariante induite par une R'_{k+1}-connexion sans courbure dans $J_k(T)$, d'après la proposition 3.2 nous avons donc $N'_k \subset N_k$. Si $I = J$, on a alors $N'_{k,x} = N_{k,x}$; donc dans ce cas, on a l'égalité $N'_k = N_k$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(N'_k) & \longrightarrow & H^*(N_k) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^*(R'_k) & \longrightarrow & H^*(R_k) \end{array}$$

d'algèbres de Lie graduées dont les flèches horizontales définissent des homomorphismes $H^*(M, J) \to H^*(L, I)$ et $H^*(M) \to H^*(L)$. Montrons qu'ils sont bien définis. Prenons un monomorphisme $i^\#: L \to J_\infty(T)_x$ d'algèbres de Lie transitives tel que $i^\#(L^0) = i^\#(L) \cap J^0_\infty(T)_x$ et $i^\#(L)$ soit une sous-algèbre transitive de $J_\infty(T)_x$ et des équations de Lie analytiques $R'^\#_k$, $R^\#_k$ dans $J_k(T)$ formellement transitives et formellement intégrables et $F^\#$, $G^\# \in Q_\infty(x, x)$ tels que $R'^\#_k \subset R_k$ et

$$R'^\#_{k,x} = \pi_k i^\#(M) , \qquad R_{k,x} = \pi_k i^\#(L) ,$$
$$G^\# i^\#(M) = R'^\#_{\infty,x} , \qquad F^\# i^\#(L) = R^\#_{\infty,x} ,$$
$$\pi_{k+1} F^\# = \pi_{k+1} G^\# = I_{k+1}(x) .$$

Soient $N'^\#_k \subset R'^\#_k$, $N^\#_k \subset R^\#_k$ les équations de Lie données par le théorème 10.1 appartenant à $\mathscr{I}(R'^\#_k)$, $\mathscr{I}(R^\#_k)$ respectivement telles que $N'^\#_{\infty,x} = G^\# i^\#(J)$, $N^\#_{\infty,x} = F^\# i^\#(I)$, de sorte que $N'^\#_k \subset N^\#_k$ et, si $I = J$, on ait $N'^\#_k = N^\#_k$. D'après le théorème 4.1, il existe $\psi \in Q_{k+1}(x, x)$ tel que $\psi \pi_k i = \pi_k i^\#$, de sorte que

$$\psi(R'_{k,x}) = R'^\#_{k,x} , \qquad \psi(R_{k,x}) = R^\#_{k,x} ,$$
$$\psi(N'_{k,x}) = N'^\#_{k,x} , \qquad \psi(N_{k,x}) = N^\#_{k,x} .$$

D'après la proposition 5.5, il existe une section analytique ϕ de Q^0_{k+1} sur un voisinage de x tel que l'on ait

$$\phi(R'_k) = R'^\#_k , \qquad \phi(\tilde{R}'_k) = \tilde{R}'^\#_k ,$$
$$\phi(R_k) = R^\#_k , \qquad \phi(\tilde{R}_k) = \tilde{R}^\#_k$$

sur ce voisinage et $\phi(x) = \psi$. D'après le § 5, le noyau g'_k de $\pi_{k-1}: R'_k \to J_{k-1}(T)$ est 2-acyclique. Alors $\mathscr{D}\phi^{-1}$ est une section de $J_0(T)^* \otimes \tilde{R}'^\#_k$; si $P'^\#_{k+1}$ est une forme finie analytique de $R'^\#_{k+1}$, d'après le deuxième théorème fondamental pour les équations de Lie analytiques, il existe une section analytique ϕ' de $\mathscr{P}'^\#_{k+1}$ sur un voisinage de x telle que $\mathscr{D}\phi' = \mathscr{D}\phi^{-1}$ et $\phi'(x) = I_{k+1}(x)$, de sorte que $\mathscr{D}(\phi' \cdot \phi) = 0$. On peut donc écrire $\phi' \cdot \phi = \tilde{j}_{k+1}(f)$, où f est un difféomorphisme de X défini sur un voisinage connexe U de x (cf. théorème 6.2). On a alors $\tilde{j}_{k+1}(f)(x) = \phi(x)$ et

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(R'_{k|U}) = R'^{\#}_{k|f(U)}, \qquad \tilde{j}_{k+1}(f)(R_{k|U}) = R^{\#}_{k|f(U)},$$

et d'après la proposition 11.2

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(N'_{k|U}) = N'^{\#}_{k|f(U)}, \qquad \tilde{j}_{k+1}(f)(N_{k|U}) = N^{\#}_{k|f(U)}.$$

On a donc des diagrammes commutatifs d'algèbres de Lie graduées

$$\begin{array}{ccc} H^*(N'_k)_x & \longrightarrow & H^*(N_k)_x \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ H^*(N'^{\#}_k)_x & \longrightarrow & H^*(N^{\#}_k)_x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^*(R'_k)_x & \longrightarrow & H^*(R_k)_x \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ H^*(R'^{\#}_k)_x & \longrightarrow & H^*(R^{\#}_k)_x \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes induits par f et la proposition 11.2, ce qui montre que les homomorphismes $H^*(M, J) \to H^*(L, I)$ et $H^*(M) \to H^*(L)$ sont bien définis à des automorphismes des algèbres de Lie graduées près.

Bibliographie (*Suite*)

[19] H. Goldschmidt, *On the Spencer cohomology of a Lie equation*, Partial Differential Equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol 23, Berkeley, California, 1971) Amer. Math. Soc., 1973, 379–385.

[20] ——, *Prolongements d'équations différentielles linéaires*. III. *La suite exacte de cohomologie de Spencer*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974) 5–28.

[21] V. W. Guillemin, *A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, J. Differential Geometry **2** (1968) 313–345.

[22] M. Kuranishi, *On the local theory of continuous infinite pseudo groups*. I, **II**, Nagoya Math. J. **15** (1959) 225–260; **19** (1961) 55–91.

[23] M. Kuranishi & A. A. M. Rodrigues, *Quotients of pseudo groups by invariant fiberings*, Nagoya Math. J. **24** (1964) 109–128.

[24] A. Petitjean, *Homomorphismes de pseudo-groupes de Lie*, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1972.

[25] A. A. M. Rodrigues, *Sur le quotient d'un pseudo-groupe de Lie infinitésimal transitif involutif par une fibration invariante*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **269** (1969) 1211–1213.

Université de Nice
Princeton University